Injections et surjections dans la vie quotidienne.

Romina dispose de colliers et de boîtes. On note E l'ensemble des colliers et F celui des boîtes. On suppose ces ensembles finis. Romina met chaque collier dans une boîte (elle peut mettre plusieurs colliers dans la même boîte et peut laisser certaines boîtes vides). Si x est un collier, on note $f(x)$ la boîte dans laquelle Romina met le collier x. Cela définit une application f de E dans F. On considère la situation une fois les colliers mis dans les boîtes et on cherche à traduire en termes concrets les propriétés éventuelles de f. Par exemple, $Card\, f(E) = 1$ veut dire que tous les colliers ont été mis dans la même boîte ; dire que f est injective signifie que chaque boîte contient au plus un collier, etc.

Exercice 1 *Traduire en termes concrets les propositions suivantes, comme dans l'exemple :*

1a) f *n'est pas injective*
1b) f *est surjective*
1c) f *n'est pas surjective*
1d) f *est bijective*
1e) f *n'est pas bijective*

En considérant toujours la situation une fois les colliers mis dans les boîtes, on s'intéresse maintenant à des propriétés sur les cardinaux. Par exemple, la proposition "Si $Card\, E < Card\, F$, alors la fonction f ne peut pas être surjective" exprime simplement le fait que s'il y a strictement moins de colliers que de boîtes, alors il y a au moins une boîte qui ne contient aucun collier.

Exercice 2 *Traduire en termes concrets les propositions suivantes :*

2a) Si $Card\, E > Card\, F$*, alors la fonction* f *ne peut pas être injective.*
2b) Si $Card\, E = Card\, F$*, alors* f *est injective ssi* f *est surjective.*
2c) $Card\, f(E) \leq Card\, E$
2d) f *est injective ssi* $Card\, f(E) = Card\, E$

En plus de ses colliers et de ses boîtes, Romina dispose de tiroirs, dont l'ensemble est noté G. Après avoir mis les colliers dans les boîtes, Romina met chaque boîte (vide ou non) dans un tiroir (elle peut mettre plusieurs boîtes dans le même tiroir et peut laisser certains tiroirs vides). On considère la situation une fois le rangement terminé. Si y est une boîte, on note $g(y)$ le tiroir où Romina a rangé la boîte y. Cela définit une application g de F dans G. On dit qu'un tiroir contient le collier x s'il contient une boîte qui contient le collier x ; en d'autres termes, le collier x se trouve dans le tiroir $g \circ f(x)$.

Exercice 3 *Traduire en terme concret les résultats suivants (vus en cours) :*

3a) Si $g \circ f$ *est injective, alors* f *est injective*
3b) Si $g \circ f$ *est surjective, alors* g *est surjective*
3c) Si f *et* g *sont toutes deux injectives, alors* $g \circ f$ *est injective*
3d) Si f *et* g *sont toutes deux surjectives, alors* $g \circ f$ *est surjective.*