

Partiel d'algèbre 1

Durée 2h. Tous documents et appareils électroniques interdits. Le barème est approximatif.

Sauf mention contraire, les réponses doivent être justifiées.

Questions de cours (5,5pts)

- 1) (1pt) Soit $E = \{1\}$. Sans justifier, donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
- 2) (1pt) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$. Soit A l'ensemble des racines nièmes de z . Est-il possible de trouver une application $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A$ injective mais non surjective ? Justifier brièvement.
- 3) (1,5pt) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 + (2 + 2i)z + 1 + i(1 - \sqrt{3}) = 0$. On donnera les racines sous forme cartésienne, c'est à dire sous la forme $x + iy$.
- 4) (2pts) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$ et $B = \{e^{i2k\pi/n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$. Rédémontrer que $A = B$.

Exercice 1 (4,5pts) Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Soient les applications

$$\begin{array}{ccc} r : \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & ze^{i\theta} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \pi : \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \operatorname{Re}(z) \end{array}$$

- a) (0,5pt) Interpréter r et π géométriquement.
- b) (1,5pt) Montrer que r est bijective et déterminer sa réciproque. Déterminer $r(\mathbb{C})$.
- c) (2,5pts) On note $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité. Sans justifier, donner $\pi(\mathcal{U})$. En justifiant, déterminer $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ et $\pi(\pi^{-1}(\mathcal{U}))$. Interpréter géométriquement ces ensembles.

Exercice 2 (5pts) Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application différente de l'identité et telle que $f \circ f = f$.

- a) (0,5pt) Montrer que f n'est pas bijective.
- b) (1pt) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $z \in f(\mathbb{C})$ si et seulement si $f(z) = z$.
- c) (0,5pt) Montrer que f n'est pas surjective.
- d) (1pt) Montrer que f n'est pas injective.
- e) (1pt) Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $g \circ g = g$. Montrer que si g est injective, alors g est bijective.
- f) (1pt) Sans justifier, donner un exemple d'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ injective mais non bijective.

Exercice 3 (Théorème de Tarski) (6,5 pts)

Soit E un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre partiel notée $\preceq$. Soit $f : E \rightarrow E$ une application. Soit $A = \{x \in E, x \preceq f(x)\}$. On suppose que :

- (H1) Toute partie non vide de E a une borne inférieure et une borne supérieure (qui sont dans E).
 - (H2) L'application f est croissante au sens où, pour tous x et y dans E , si $x \preceq y$ alors $f(x) \preceq f(y)$.
- a) (1pt) Montrer que E a un plus petit élément.
 - b) (0,5pt) Montrer que A a une borne supérieure.
 - c) (1pt) Montrer que $f(A) \subset A$.
 - d) (3pts) (difficile) Soit $y = \sup A$. Montrer que $f(y) = y$.
 - e) (1pt) Soit $B = \{x \in E, f(x) = x\}$. Montrer que $\max B$ existe et que $\max B = \sup A$.