Chapitre 1 : s'exprimer en mathématiques

Ces notes correspondent au cours qui a été donné en amphi. C'est une version condensée du polycopié de logique, à utiliser pour réviser ou tout de suite si son degré d'abstraction ne vous gêne pas. Le lecteur pourra consulter également le chapitre "S'exprimer en mathématiques" dans le cours d'Algèbre 1ère année de D. Liret et F. Martinais, chez Dunod.

1 Les propositions

Une proposition est un énoncé mathématique complet qui est soit vrai soit faux. Par exemple, "$2^3 \geq 10$" est une proposition fausse ; "Dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypothénuse est égale à la somme des carrés des deux autres côtés" est une proposition vraie. Un axiome est une proposition dont on admet qu'elle est vraie. Un théorème est une proposition dont on démontre qu'elle est vraie, à l'aide des axiomes, des théorèmes déjà démontrés, et des règles de logique que nous allons étudier.

A partir de propositions existantes et d'expression comme "non", "et", "ou", "implique",..., on peut former de nouvelles propositions. Dans la suite, les lettres P, Q, R désignent des propositions. Ne pas tenir compte du fait que ces lettres soient en italique ou pas.

1.1 Sens de "non", "et", "ou"

⋄ La proposition "non P", appelée négation de P, veut dire : "P est fausse". La proposition "non P" est fausse si P est vraie, et vraie si P est fausse.

⋄ "P et Q" veut dire : les propositions¨P et Q sont toutes les deux vraies.

⋄ "P ou Q" veut dire : au moins l'une des propositions P et Q est vraie.

A noter : en mathématiques, "P ou Q" ne veut pas dire "soit P, soit Q" (comme dans "fromage ou dessert") mais "soit P, soit Q, soit les deux" (comme dans "Les étudiants boursiers ou originaires de province bénéficieront d'une aide."). On dit que le ou est inclusif.

⋄ On peut combiner plusieurs de ces expressions. Par exemple, la proposition "(non P) ou Q" veut dire : "non P est vraie ou Q est vraie", c'est à dire : "P est fausse ou Q est vraie". Elle est vraie dans les trois cas suivants : "P fausse, Q fausse", "P fausse, Q vraie" et "P vraie, Q vraie". Elle est fausse dans le quatrième et dernier cas possible : "P vraie, Q fausse".

1.2 Implication et équivalence

'⋄ La proposition "Si $2^{10} \geq 1500$ alors $2^{11} \geq 2000$" est du type "Si P alors Q", où P est la proposition "$2^{10} \geq 1500$" et Q la proposition "$2^{11} \geq 2000$". Une telle proposition s'appelle une implication. P en est l'hypothèse, et Q la conclusion. Elle affirme que si l'hypothèse P est vraie, alors la conclusion Q est vraie. En d'autres termes, soit P est fausse, soit les propositions P et Q sont toutes les deux vraies. En subdivisant le cas P fausse en deux sous cas : "P fausse, Q fausse" et "P fausse, Q vraie" on s'aperçoit que la proposition "Si P alors Q" est vraie dans les trois cas suivants ; "P fausse, Q fausse", "P fausse, Q vraie" et "P vraie, Q vraie". Elle est fausse dans le quatrième et dernier cas possible : "P vraie, Q fausse". En comparant avec le paragraphe précédent, on se rend compte que les propositions "Si P alors Q" et "(non P) ou Q" sont vraies dans les mêmes cas, et fausses dans les mêmes cas. Ceci justifie la définition suivante, très importante :

"Si P alors Q" veut dire "(non P) ou Q", c'est à dire "P est fausse ou Q est vraie".

Au lieu de "Si P alors Q", on peut dire "P implique Q". Dans une formule, on écrit "P $\Rightarrow$ Q".

◇ l'implication "Si Q alors P" est la *réciproque* de "Si P alors Q". L'implication "Si (non Q) alors (non P)" est la *contraposée* de "Si P alors Q".

◇ On dit que les propositions P et Q sont *équivalentes* si (P implique Q) et (Q implique P). Dans une formule, on écrit : $P \Leftrightarrow Q$.

Le tableau suivant résume les définitions données ci-dessus. Il se lit ainsi : si P est vraie et Q est vraie, alors "non P" est fausse, "P et Q" est vraie, "P ou Q" est vraie, etc. Si P est vraie et Q est fausse, alors "non P" est fausse, "P et Q" est fausse, "P ou Q" est vraie, etc. La deuxième colonne s'appelle la *table du vérité* du ET, la troisième la table de vérité du OU, etc.

P	Q	non P	P ET Q	P OU Q	P $\Rightarrow$ Q	Q $\Rightarrow$ P	P $\Leftrightarrow$ Q
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	V	F	F
F	F	V	F	F	V	V	V

En lisant la table du vérité de l'équivalence, on constate que *deux propositions sont équivalentes si et seulement si elles ont la même "valeur de vérité", c'est à dire si elles sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.*

1.3 Propriétés principales

On admet que les équivalences suivantes sont vraies pour toutes propositions P, Q, R.

(Remarque : une proposition *complexe* est une proposition formée à partir de propositions de base et de termes comme "et", "ou", "non", etc, qu'on appele des connecteurs. Par exemple, "P et Q" est une proposition complexe formée à l'aide des propositions P, Q et du connecteur "ou". Une manière élémentaire (mais très longue) de démontrer que deux propositions complexes A et B sont équivalentes est de faire la table de vérité de A et de B et de vérifier que A et B sont vraies dans les mêmes cas et fausses dans les mêmes cas. Cette méthode permettrait notamment de démontrer toutes les équivalences suivantes.)

1.3.1 Propriétés de "non", "et", "ou"

◇ Double négation : non(non P) $\Leftrightarrow$ P

◇ Commutativité du "ou" et du "et" : (P ou Q) $\Leftrightarrow$ (Q ou P) ; (P et Q) $\Leftrightarrow$ (Q et P).

◇ Associativité du "ou" et du "et" : (P ou Q) ou R $\Leftrightarrow$ P ou (Q ou R) ; (P et Q) et R $\Leftrightarrow$ P et (Q et R).

◇ Négation du "ou" et du "et" : non(P ou Q) $\Leftrightarrow$ (non P) et (non Q) ; non(P et Q) $\Leftrightarrow$ (non P) ou (non Q)

◇ Distributivité du "et" sur le "ou", et du "ou" sur le "et" :
P et (Q ou R) $\Leftrightarrow$ (P et Q) ou (P et R) ; P ou (Q et R) $\Leftrightarrow$ (P ou Q) et (P ou R)

Remarque : en général, *la place d'éventuelles parenthèses est importante.* Par exemple, "(non P) ou Q" ne veut pas dire la même chose que "non (P ou Q)" : si P et Q sont toutes les deux vraies, la première proposition est vraie, mais la seconde est fausse.

1.4 Implication

◇ la négation de "P implique Q" est "P et (non Q)".

◇ transitivité : si $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Leftrightarrow R)$ alors $(P \Rightarrow R)$.

Convention : dans ce cours, quand on écrira $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$, sans parenthèses, on voudra toujours dire : $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$, donc $P \Rightarrow R$.

◇ une implication et sa contraposée sont équivalentes : "Si P alors Q" ⇔ "Si (non Q) alors (non P)". C'est la base du raisonnement “par contraposée".

1.5 Equivalence

◇ la négation de "P et Q sont équivalentes" est "l'une des propositions est vraie et l'autre est fausse".

◇ transitivité : si (P ⇔ Q) et (Q ⇔ R) alors (P ⇔ R)

◇ règle d'échange : si dans une proposition complexe on remplace une des propositions de base par une proposition équivalente, on ne change pas la valeur de vérité de la proposition complexe. Par exemple, si P et Q sont équivalentes, alors pour toute proposition R : (P et R) ⇔ (Q et R).

2 Les expressions “pour tout" et “il existe"

Pour dire que pour n'importe quel réel x on a $x^2+x+1 \geq 0$, on écrit : "Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a $x^2+x+1 \geq 0$" (au lieu de “pour tout x dans $\mathbb{R}$", on peut dire : “pour tout réel x", "pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$", “quelque soit x dans $\mathbb{R}$", ou encore "pour tout élément x de $\mathbb{R}$"). Dans les formules, et uniquement dans les formules, "pour tout" se note "$\forall$", et "x est dans $\mathbb{R}$" se note "$x \in \mathbb{R}$". La proposition précédente s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2+x+1 \geq 0$$

Après $\forall$, la virgule se lit “on a" ou ne se lit pas.

Pour dire qu'il y a au moins un réel x tel que $x^2+x+1 \geq 0$, on écrit : "Il existe x dans $\mathbb{R}$ tel que $x^2+x+1 \geq 0$" (ou simplement : "Il existe x dans $\mathbb{R}$, $x^2+X+1 \geq 0$"). Dans les formules, "il existe" se note "$\exists$". La proposition précédente s'écrit :

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2+x+1 \geq 0$$

Après $\exists$, la virgule se lit "tel que".

Plus généralement, soit E un ensemble et $P(x)$ un énoncé qui pour toute valeur donnée à x dans E est soit vrai soit faux. Pour dire que pour n'importe quel élément x de E, l'énoncé $P(x)$ est vrai on écrit : "Pour tout x dans E, $P(x)$", et dans une formule : "$\forall x \in E, P(x)$". Pour dire qu'il y au moins un élément x de E tel que $P(x)$ est vrai, on écrit : “Il existe x dans E tel que $P(x)$.

Vocabulaire : les expressions "pour tout" et "il existe" servent à préciser la “quantité" d'éléments qu'on considère. Pour cette raison, on les appelle des *quantificateurs.*

2.1 Enoncés avec plusieurs quantificateurs

Importance de l'ordre : dans un énoncé comprenant plusieurs quantificateurs, l'ordre dans lequel ils interviennent est important. Considérons les deux propositions suivantes :

P1 : “Pour tout réel x, il existe un entier naturel n tel que $x \leq n$".
P2 : “Il existe un entier naturel n tel que, pour tout réel x, $x \leq n$"

La première proposition est vraie : pour n'importe quel réel donné, on peut trouver un entier naturel qui est plus grand que ce réel. En revanche, la seconde proposition est fausse : il n'existe pas d'entier naturel qui soit plus grand que tous les réels (si je fixe un entier naturel n, il y aura toujours des réels x tels que $x > n$, par exemple $x = n + 1$. Le problème vient du fait que dans la première proposition, n peut dépendre de x, alors que dans la deuxième proposition, le n ne dépend pas de x.

Plus généralement, dans un énoncé du type : "Pour tout x dans E, il existe y dans F tel que blah blah blah", y dépend de x. Dans un énoncé du type "Il existe y dans F tel que, pour tout x dans E blah blah blah", y ne dépend pas de x.

A retenir : *on ne peut pas intervertir un "pour tout" et un "il existe"* (cela changerait le sens de la proposition).

En revanche, on peut intervertir deux "pour tout" qui se suivent, ou deux "il existe" qui se suivent : cela ne change pas le sens.

2.2 Négation

$\diamond$ La négation de "Pour tout élément x de E, $P(x)$ est vraie" est : "Il existe un élément x de E tel que $P(x)$ est fausse", c'est à dire, "Il existe un élément x de E tel que non $P(x)$".

$\diamond$ La négation de "Il existe un élément x de E tel que $P(x)$ est vraie" est "Pour tout élément x de E, $P(x)$ est fausse", c'est à dire "Pour tout élément x de E, non $P(x)$".

En langage formel :

$$non(\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E, nonP(x)$$

$$non(\exists x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in E, nonP(x)$$

Pour former la négation d'une proposition comportant plusieurs quantificateurs, il suffit d'appliquer les régles précédentes plusieurs fois de suite. En pratique, cela revient à appliquer la règle suivante : pour former la négation d'une proposition comportant un ou plusieurs quantificateurs, on inverse les quantificateurs et on nie la les quantificateurs veut dire changer les "pour tout" en "il existe" et les "il existe" en "pour tout". Si la proposition est écrite de manière formelle (avec $\exists$, $\forall$, etc.), on change les $\forall$ en $\exists$, les $\exists$ en $\forall$, et on nie la conclusion.

Exemple : soit P la proposition suivante (qui affirme l'existence du quotient et du reste dans la division euclidienne d'un entier naturel par un entier naturel non nul) :

"Pour tout a dans $\mathbb{N}$, pour tout b dans $\mathbb{N}^*$, il existe q dans $\mathbb{N}$, il existe r dans $\mathbb{N}$, $(a = bq + r$ et $r < b)$".

La négation de P est :

"Il existe a dans $\mathbb{N}$, il existe b dans $\mathbb{N}^*$, pour tout q dans $\mathbb{N}$, pour tout r dans $\mathbb{N}$, non$(a = bq + r$ et $r < b)$".

Or la négation de "A et B" est "(non A) ou (non B)". On obtient donc que la négation de P est :

"Il existe a dans $\mathbb{N}$, il existe b dans $\mathbb{N}^*$, pour tout q dans $\mathbb{N}$, pour tout r dans $\mathbb{N}$, $(a \neq bq + r$ ou $r \geq b)$".

L'écriture formelle de P est

$$\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}^*, \exists q \in \mathbb{N}, \exists r \in \mathbb{N}, (a = bq + r \text{ et } r < b)$$

Celle de non P est :

$$\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}^*, \exists q \in \mathbb{N}, \exists r \in \mathbb{N}, non(a = bq + r \text{ et } r < b)$$

ce qui donne finalement

$$\exists a \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{N}, (a \neq bq + r \text{ ou } r \geq b)$$

2.3 Autres quantificateurs

Vous rencontrerez parfois les quantificateurs suivants :

$\diamond$ "Il existe au plus un", qui se note "!" dans une formule, et qui veut dire "Il y a zéro ou un élément, mais pas deux ni plus"

$\diamond$ "Il existe un unique", qui se note " $\exists!$ dans une formule, et qui veut dire "Il y a exactement un élément (ni zéro, ni deux ni plus que deux)".

Par exemple, les propositions suivantes sont vraies : "Il existe au plus un réel x tel que $x^2 = -5$" ; "Il existe au plus un réel positif x tel que $x^2 = 1$" ; "Il existe un unique réel positif x tel que $x^2 = 1$. En revanche, les propositions suivantes sont fausses : "Il existe un unique réel x tel que $x^2 = -5$" ; "Il existe au plus un réel x tel que $x^2 = 1$; "Il existe un unique réel x tel que $x^2 = 1$".