UNIVERSITE PARIS-DAUPHINE DUMI2E 1ère année, 7 décembre 2009

Contrôle continu d'algèbre 1

Durée 1h10. Tous documents et appareils électroniques interdits.
Barême approximatif.

Questions de cours (13pts)

1) (2pts) Enoncer précisément et dans sa forme la plus complète le théorème portant sur la décomposition des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$.

2) (2pts) Soit E un ensemble et $\preceq$ une relation d'ordre sur E. Soit $A \subset E$ et $x \in E$. Donner la définition précise de : i) x est le plus petit élément de A ; ii) x est un élément minimal de A ; iii) x est la borne inférieure de A.

3) (1pt) Le polynôme $X^4 + 6$ est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? Justifier.

4) (4pts) Soient a et b des entiers naturels, avec $b \neq 0$. Redémontrer en rédigeant particulièrement soigneusement qu'il existe des entiers naturels q et r tels que $a = bq + r$ et $r < b$.

5) (2pts) Soient A et B dans $\mathbb{R}[X]$. On suppose $B \neq 0$. Redémontrer qu'il existe au plus un couple (Q, R) dans $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ tels que $A = BQ+R$ et $deg(R) < deg(B)$.

6) (2pts) On note F l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$. Soit $\phi : \mathbb{C}[X] \to F$ l'application telle que, pour tout polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$, $\phi(P)$ est la fonction polynôme associée à P. Rédémontrer que ϕ est injective.

Exercice 1 (2pts). Le polynôme $X^2 + 2X - 1$ divise-t-il $X^4 + 3X^3 + 2X^2 + X - 1$? Justifier.

Exercice 2 (3pts) Soit $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ définie par, pour tout $(n, p, q) \in N^3$, $f((n, p, q)) = 2^n 3^p 5^q$. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 3 (2pts) Quels sont les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout entier naturel k, $P^{(k)}(k) = k$? (on rappelle que $P^{(k)}$ désigne le polynôme P dérivé k fois).