Systèmes linéaires [1]

Préliminaires : *Lisez une première fois ce polycopié de manière rapide, puis relisez-le en essayant de tout comprendre. Le polycopié est long, mais rapide à lire. L'objectif est que vous sachiez résoudre des systèmes linéaires avec ou sans paramètres* ***et que vous connaissiez les propriétés exposées dans les sections 3 et 5****.*

On s'intéresse ici aux systèmes linéaires à coefficient réels, mais la façon de procéder est tout à fait générale, et tous les résultats obtenus sont encore vrais pour les systèmes linéaires à coefficients complexes.

En pratique, vous savez déjà résoudre des systèmes linéaires de petite taille, et depuis longtemps. Mais pour cela, beaucoup d'entre vous utilisent plutôt un ensemble d'astuces qu'une méthode précise. Vous seriez dans doute un peu perdu si vous deviez résoudre un système linéaire de 150 équations à 130 inconnues, où si vous deviez écrire un programme informatique qui permette à un ordinateur de résoudre un tel système. Or résoudre des systèmes de très grande taille est un problème courant dans beaucoup d'applications des mathématiques. Il est donc important de comprendre comment de tels systèmes peuvent être résolus.

1 Qu'est ce qu'un système linéaire ?

Informellement, une équation est linéaire si les variables y apparaissent de manière séparées et toujours à la puissance 1. Un système linéaire, aussi appelé "système d'équations linéaires", est un système de telles équations. Par exemple, les trois systèmes suivants sont des systèmes linéaires :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 6y & = & -3 \\ -2x & + & y & = & 12 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 5 \\ 2x & + & y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

Le premier est un système de deux équations à deux inconnues (notées x et y), le deuxième un système de deux équations à trois inconnues (x, y et z) et le troisième un système de trois équations à deux inconnues (notées x_1 et x_2 au lieu de x et y).

En revanche, les systèmes suivants ne sont pas des systèmes linéaires :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & y^2 & = & 1 \\ 2x & + & 3y & = & 8 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 5 \\ & 2xy & & = & 4 \end{array}\right.$$

En effet, dans le système de gauche, dans la première équation, une des inconnues apparait à une puissance autre que 1. Dans le système de droite, dans la deuxième équation, les inconnues n'apparaissent pas de manière "séparée".

[1] Pour toute remarque : yannick.viossat@dauphine.fr

Vous avez sans doute l'habitude de noter les inconnues x et y quand il y en a deux et x, y et z quand il y en a trois. Mais comment les noter s'il y a 130 inconnues ? La solution la plus simple est de noter la première inconnue x_1, la deuxième x_2 et la $k$ième x_k. En notant ainsi les inconnues, les deux premiers systèmes de (1) deviennent respectivement :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 6x_2 & = & -3 \\ -2x_1 & + & x_2 & = & 12 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Définition : soient n et p des entiers non nuls. Un *système linéaire* de n équations à p inconnues est un système du type :

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = b_2 \\ \quad\quad\quad \vdots \quad \vdots & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = b_n \end{array}\right. \tag{2}$$

où les coefficients a_{ij} et b_i sont des réels fixés.

◇ Les *inconnues* sont x_1, x_2, ..., x_p.

◇ les réels a_{ij} sont les *coefficients du premier membre*. Le premier indice indique la ligne, le deuxième la colonne.

◇ Les réels b_i sont les *coefficients du second membre*. L'indice indique la ligne.

Exemple : pour le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 6x_2 & = & -3 \\ -2x_1 & + & x_2 & = & 12 \end{array}\right. \tag{3}$$

on a $a_{11} = 3$, $a_{12} = 6$, $a_{21} = -2$, $a_{22} = 1$, $b_1 = -3$ et $b_2 = 12$.

Définition : une solution du système linéaire (2) est un p-uplet de réels $(x_1, x_2, ..., x_p)$ qui vérifie toutes les équations du système. On dit qu'un système est *compatible* s'il a au moins une solution.

Exemple : $(-5, 2)$ est une solution du système (3). En effet, pour $x_1 = -5$ et $x_2 = 2$, on a bien $3x_1+6x_2 = -3$ et $-2x_1+x_2 = 12$. En revanche, $(1, -1)$ n'est pas une solution de (3) car pour $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$, la deuxième équation n'est pas satisfaite.

2 Résolution d'un système linéaire

Définition : deux systèmes linéaires sont *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

Résoudre un système linéaire, c'est en déterminer toutes les solutions. Pour ce faire, on transforme le système initial en un système équivalent plus simple, puis en un système encore plus simple, jusqu'à aboutir à un système qu'on sache résoudre. Les principales opérations qui permettent de transformer un système linéaire en un système linéaire équivalent sont les suivantes :

◇ multiplier une ligne par une constante non nulle

◇ ajouter λ fois la ligne k à la ligne i, où λ est un réel quelconque et $i \neq k$

◇ échanger la ligne i et la ligne k

Les trois opérations ci-dessus sont appelées "**opérations élémentaires**". Ce sont les plus importantes. On peut aussi :

$\diamond$ ajouter à une ligne une combinaison des autres lignes (remplacer la kième ligne L_k par $L_k + \sum_{i \neq k} \lambda_i L_i$). Cela revient à faire plusieurs opérations élémentaires successives.

$\diamond$ supprimer les lignes $0 = 0$

$\diamond$ conclure que le système n'a pas de solutions s'il comporte une ligne du type $0 = b_i$ avec $b_i \neq 0$.

Dans les exemples de résolution de systèmes linéaires ci-dessous, on écrira en face de la ième ligne du système :

$\diamond$ $L_i \leftarrow \lambda L_i$, ou simplement λL_i, pour dire que la ième ligne du nouveau système est égale à λ fois la ième ligne de l'ancien système.

$\diamond$ $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$, ou simplement $L_i + \lambda L_k$, pour dire que la nouvelle ligne i est égale à l'ancienne ligne i plus λ fois l'ancienne ligne k

$\diamond$ $L_i \leftrightarrow L_k$ pour dire que les lignes i et k ont été échangées

2.1 Exemple de résolution d'un système linéaire

Considérons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x & + & 6y & = & -3 \\ -2x & + & y & = & 12 \end{array} \right. \tag{4}$$

En multipliant la première ligne par 1/3, on obtient le système équivalent :

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & -1 \\ -2x & + & y & = & 12 \end{array} \right. \tag{5}$$

Puis en ajoutant deux fois la première ligne à la seconde ligne, on obtient :

$$\begin{array}{r} L_1 \\ L_2 + 2L_1 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & -1 \\ & & 5y & = & 10 \end{array} \right. \tag{6}$$

En divisant la deuxième ligne par 5, on obtient

$$\begin{array}{r} L_1 \\ \frac{1}{5}L_2 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & -1 \\ & & y & = & 2 \end{array} \right. \tag{7}$$

Enfin, en soustrayant deux fois la deuxième ligne à la première ligne, on obtient :

$$\begin{array}{r} L_1 - 2L_2 \\ L_2 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & -5 \\ & & y & = & 2 \end{array} \right. \tag{8}$$

Le système a donc une solution unique : $(-5, 2)$

2.2 Résolution en travaillant directement sur le tableau des coefficients

Lorsqu'on travaille sur des systèmes de grande taille, recopier à chaque fois le nom des inconnues est vite fatiguant. Aussi, les mathématiciens, qui sont des êtres paresseux, préfèrent-ils travailler directement sur le tableau des coefficients. Au lieu d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x & + & 6y & = & -3 \\ -2x & + & y & = & 12 \end{array} \right.$$

on écrit

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & -3 \\ -2 & 1 & 12 \end{array}\right) \tag{9}$$

Les coefficients du premier membre apparaissent à gauche de la barre verticale, et les coefficients du second membre à droite. La résolution se fait comme précédemment, sauf qu'on ne s'embête plus à recopier les inconnues. On obtient successivement :

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} L_1 \\ L_2 + 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} L_1 \\ \frac{1}{5}L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

et enfin

$$\begin{array}{r} L_1 - 2L_2 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

c'est à dire le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & -5 \\ & & y & = & 2 \end{array}\right. \tag{10}$$

On conclut comme précedemment que le système a une unique solution : $(-5, 2)$.

Dans la suite, on travaillera directement sur le tableau des coefficients.

2.3 Solutions de quelques systèmes linéaires simples.

Avant de donner d'autres exemples de résolutions de systèmes linéaires, voici quelques exemples du type de systèmes auquel on souhaite aboutir.

Exemple 2.3.1 Le système

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 3 \\ & & 0 & = & 5 \end{array}\right. \tag{11}$$

n'a pas de solutions, car la deuxième équation ne peut pas être satisfaite. D'une manière générale, si lors de la résolution d'un système, on obtient un système équivalent qui comporte une équation du type $0 = \beta$ avec $\beta \neq 0$, on s'arrête et on conclut que le système n'a pas de solutions.

Exemple 2.3.2 Le système

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & +2y & +2z & = & 12 \\ & 3y & +6z & = & -3 \\ & & 5z & = & -10 \end{array}\right. \tag{12}$$

a les propriétés suivantes :

(a) il a autant d'équations que d'inconnues

(b) il est triangulaire (au sens où les coefficients a_{ij} avec $i > j$ sont nuls)

(c) les coefficients situés sur la diagonale sont non nuls.

Un tel système se résoud aisément, et a toujours exactement une solution. Voici deux méthodes de résolutions :

Première méthode (sans doute la plus rapide) : on calcule z à l'aide de la dernière équation, puis y à l'aide de la deuxième équation et de la valeur de z, puis enfin x à l'aide de la première équation et des valeurs de y et de z. On obtient ici : $z = -10/5 = -2$, puis $y = \frac{1}{3}(-3-6z) = \frac{1}{3}(-3+12) = 3$ et enfin $x = \frac{1}{2}(12-2y-2z) = \frac{1}{2}(12-6+4) = 5$. Il y a donc une seule solution possible : $(5,3,-2)$. De plus, $(5,3,-2)$ est bien solution des trois équations du système. Le système a une solution unique : $(5,3,-2)$.[2]

Deuxième méthode (la plus intéressante d'un point de vue théorique) : on transforme le système (12) en un système équivalent encore plus simple. Le but est d'obtenir à la fin un système avec des coefficients 1 sur la diagonale et des 0 à la fois en dessous de la diagonale (comme c'est déjà le cas) et au dessus. En pratique, en partant du système initial

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 12 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{array}\right) \tag{13}$$

on commence par mettre des 1 sur la diagonale :

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}L_1 \\ \frac{1}{3}L_2 \\ -\frac{1}{5}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \tag{14}$$

puis on fait apparaître des 0 au-dessus de la diagonale, en commençant par la dernière colonne. On obtient :

$$\begin{array}{r} L_1 - L_3 \\ L_2 - 2L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

puis

$$\begin{array}{r} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

c'est à dire :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 5 \\ & y & & = & 3 \\ & & z & = & -2 \end{array}\right. \tag{15}$$

Ce système a à l'évidence une solution unique : $(5,3,-2)$

[2] On n'a pas raisonné en transformant le système initial en un système équivalent, mais en disant que si (x,y,z) est solution, alors on a forcément $x=5$, $y=3$ et $z=-2$. C'est pourquoi il faut en théorie vérifier que le "candidat" qu'on a trouvé est bien solution. En fait, comme on l'a dit ci-dessus, on peut montrer qu'un système qui vérifie les propriétés (a), (b) et (c) ci-dessus a toujours une solution et donc on est sûr que le "candidat" trouvé par la méthode ci-dessus est bien solution du système.

Exemple 2.3.3 Le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & + & z & = & -1 \\ & y & - & 2z & = & 2 \end{array}\right. \tag{16}$$

a une infinité de solutions : z peut prendre n'importe quelle valeur, et chaque valeur de z détermine un unique couple (x, y) tel que (x, y, z) est solution du système. Pour bien le voir, remarquez que le système (16) est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & & = & -1-z \\ & y & = & 2-2z \end{array}\right.$$

L'ensemble S des solutions est l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x = -1 + z$ et $y = 2 + 2z$ (z pouvant prendre n'importe quelle valeur réelle). On note

$$S = \{(-1+z, 2+2z, z), z \in \mathbb{R}\}$$

Cela signifie la même chose que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = -1 + z \text{ et } y = 2 + 2z\}$.

La variable z est dite *libre* : elle peut prendre n'importe quelle valeur. Les variables x et y sont dites *liées* : leur valeurs sont déterminées par la valeur de z.

Dans le système (15), il n'y avait aucune variable libre. Dans le système (16), il y avait exactement une variable libre. Dans d'autres systèmes, il peut y avoir plusieurs variables libres. Par exemple, dans le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ & x_2 & & & & + & 2x_5 & = & -3 \\ & & x_3 & & & - & 2x_5 & = & 0 \end{array}\right. \tag{17}$$

il y a deux variables libres : x_4 et x_5, et trois variables liées : x_1, x_2, et x_3. Le système peut se réécrire sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & 2-2x_4-3x_5 \\ & x_2 & & = & -3-2x_5 \\ & & x_3 & = & 2x_5 \end{array}\right.$$

L'ensemble S des solutions est l'ensemble des quintuplets $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ tels que $x_1 = 2 - 2x_4 - 3x_5$, $x_2 = -3 - 2x_5$ et $x_3 = 2x_5$ (x_4 et x_5 pouvant prendre n'importe quelles valeurs). On écrit :

$$S = \{(2-2x_4-3x_5, -3-2x_5, 2x_5, x_4, x_5), (x_4, x_5) \in \mathbb{R}^2\}$$

Exercice (réponse dans la note de bas de page) : (a) déterminer l'unique solution du système précédent telle que $x_4 = 1$ et $x_5 = 0$; (b) même question avec $x_4 = 0$ et $x_5 = 1$. [3]

Exemple 2.3.4 Considérons maintenant le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & & & + & 3x_5 & = & 2 \\ & & & x_3 & & + & 2x_5 & = & -3 \\ & & & & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \end{array}\right. \tag{18}$$

A première vue, les solutions peuvent paraître plus difficiles à trouver que dans le système (17), mais en fait, c'est exactement le même système, sauf qu'on a changé le rôle des inconnues. Le système

[3] Réponses : (a) : $(0, -3, 0, 1, 0)$; (b) : $(-1, -5, 2, 0, 1)$

peut se réécrire sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_1 & & & = & 2-2x_2-3x_5 \\ & x_3 & & = & -3-2x_5 \\ & & x_4 & = & 2x_5 \end{array}\right. \tag{19}$$

L'ensemble des solutions est

$$S = \{(2-2x_2-3x_5, x_2, -3-2x_5, 2x_5, x_5), (x_2, x_5) \in \mathbb{R}^2\}$$

Exercice (réponse dans la note de bas de page) : déterminer l'unique solution du système précédent telle que : (a) $x_2 = 1$, $x_5 = 0$; (b) $x_2 = 0$, $x_5 = 1$. Comparer à l'exercice similaire pour le système de l'exemple 3. [4]

2.4 Systèmes échelonnés et échelonnés réduits

2.4.1 Définitions

On précise maintenant la forme du système auquel on souhaite aboutir dans le cas général. Dans les deux définitions suivantes, on dira qu'une ligne d'un tableau de coefficients est “non nulle" si les coefficients *du premier membre* situés sur cette ligne ne sont pas tous nuls.

Définition. Un tableau de coefficients est dit *échelonné* si chaque ligne non nulle commence par davantage de 0 que la précédente. Un système linéaire est échelonné si le tableau de coefficients correspondant est échelonné. On appelle *pivots* d'un système échelonné les coefficients qui apparaissent en tête des lignes non nulles.

Définition. Un tableau de coefficient est dit *échelonné réduit* s'il est échelonné, si les pivots sont tous égaux à 1, et si les coefficients situés au-dessus des pivots sont nuls. Un système linéaire est dit échelonné réduit si le tableau de coefficients correspondant est échelonné réduit.

Exemples :

◇ les trois systèmes de (1) ne sont pas échelonnés.

◇ les systèmes (6), (7) et (12) sont échelonnés mais pas échelonnés réduits. Les pivots sont respectivement : 1 et 5 pour le système (6), 1 et 1 pour le système (7), et 2, 3 et 5 pour le système (12).

◇ le système

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +3y & -z & = & 8 \\ & & 4z & = & 4 \end{array}\right.$$

est également échelonné mais pas échelonné réduit. Le pivots sont égaux à 1 et 4.

◇ les systèmes (8), (15), (16), (17) et (18) sont échelonnés réduits

[4] Réponses : (a) : $(0, 1, -3, 0, 0)$; (b) : $(-1, 0, -5, 2, 1)$. On obtient les mêmes solutions que dans l'exercice précédent à une permutation des inconnues près.

Remarque : un système échelonné réduit peut comporter des lignes du type $0 = 0$ ou $0 = \beta$ avec $\beta \neq 0$. Par exemple, le tableau de coefficients suivant est échelonné réduit :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \tag{20}$$

Le système correspondant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & + & 2x_3 & & + & 3x_5 & = & 1 \\ & x_2 & + & 6x_3 & & + & x_5 & = & 0 \\ & & & & x_4 & + & 2x_5 & = & 4 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 5 \end{array}\right. \tag{21}$$

est donc échelonné réduit.

2.5 Solutions d'un système échelonné réduit

Définition : dans un système linéaire échelonné ou échelonné réduit, les variables qui correspondent aux colonnes où il n'y a pas de pivots sont dites *libres*. Les variables qui correspondent aux colonnes où il y a un pivot sont dites *liées*.

Exemple : dans le système (18), les variables libres sont x_2 et x_5, les variables liées sont x_1, x_3 et x_4.

Exercice : dans le système (21), quelles sont les variables libres ? quelles sont les variables liées ? [5]

Les solutions d'un système échelonné réduit se trouvent de manière immédiate. Si le système comporte une ligne du type $0 = \beta$ avec $\beta \neq 0$, comme les systèmes (11) et (21), il n'a pas de solutions. Sinon :

- s'il n'y a pas de variables libres, le système a exactement une solution qui se lit de manière immédiate, comme dans le système (15).
- s'il y a une ou plusieurs variables libres, il y a une infinité de solutions : les variables libres peuvent prendre n'importe quelles valeurs réelles et les variables liées s'expriment en fonction des variables libres, comme pour les systèmes (16), (17) et (18).

Puisque les solutions d'un système échelonné-réduit se trouvent de manière immédiate, il suffit pour résoudre un système linéaire de le transformer en un système échelonné réduit équivalent. Avant de montrer que c'est toujours possible, voyons comment cela peut se faire sur quelques exemples. La méthode utilisée dans la section suivante s'appelle méthode de Gauss-Jordan. C'est une variante de la méthode dite “du pivot de Gauss".

[5] Réponses : les variables libres sont x_3 et x_5. Les variables liées sont les autres : x_1, x_2 et x_4.

2.6 Mise d'un système sous forme échelonné réduite - exemples

Il y a plusieurs manières de résoudre un système linéaire et les systèmes ci-dessous ne seront pas forcément résolus de la manière la plus astucieuse qui soit. En revanche, la méthode de résolution proposée a l'avantage d'être tout à fait générale (voir la section 2.7). Elle comporte deux phases : dans la première, on met le système sous forme échelonnée. Dans la deuxième, on met le système sous forme échelonnée réduite.

Exemple 2.6.1 Résoudre le système suivant

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 3y & + & 3z & = & 18 \\ -x & + & 3y & + & 7z & = & -10 \\ x & + & 3y & + & 4z & = & 6 \end{array}\right. \tag{22}$$

Ecrivons tout d'abord le système sous forme symbolique :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 18 \\ -1 & 3 & 7 & -10 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right) \tag{23}$$

Première phase de la résolution.

Le coefficient en haut à gauche du système s'appelle le pivot du système. On commence par le transformer en un 1 en multipliant la première ligne par 1/3.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 7 & -10 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right) \tag{24}$$

Une fois que le pivot est égal à 1, on fait apparaître des 0 sous le pivot (ce qui revient à éliminer la première inconnue des deux dernières équations).

$$\begin{array}{r} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \tag{25}$$

On travaille ensuite sur le sous-système composé des deux dernières équations (donc des deux dernières lignes du tableau des coefficients). Le pivot de ce sous-système est le coefficient 4. On commence par le transformer en un 1 en divisant la deuxième ligne par 4 :

$$\begin{array}{r} L_1 \\ \frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \tag{26}$$

puis on fait apparaître un 0 sous le pivot (ce qui revient à éliminer la deuxième inconnue de la troisième équation)

$$\begin{array}{r} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \tag{27}$$

Il ne reste plus qu'à multiplier la dernière ligne par -1 pour obtenir un système échelonné avec des 1 comme pivots :

$$\begin{array}{r} L_1 \\ L_2 \\ -L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \tag{28}$$

Deuxième phase (dite "phase de remontée") : on met le système sous forme échelonné réduite.

Le but est maintenant de faire apparaître des 0 au dessus des pivots (ce qui revient dans ce cas à éliminer la troisième inconnue des deux première équations et la deuxième inconnue de la première équation). Pour cela, on commence par faire apparaître des 0 au dessus du *dernier* pivot.

$$\begin{array}{r} L_1 - L_3 \\ L_2 - 2L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \tag{29}$$

puis on fait apparaître un zéro au dessus du deuxième pivot :

$$\begin{array}{r} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \tag{30}$$

On est alors arrivé au système (15). Il y a donc une solution unique $(5, 3, -2)$.

Exemple 2.6.2 Dans l'exemple précédent, les pivots n'étaient jamais nuls. Le but de l'exemple qui suit est de montrer comment continuer la résolution quand on tombe sur un pivot nul.

Supposons qu'on veuille résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & & & 2x_3 & - & 2x_4 & + & 8x_5 & = & -6 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & + & 5x_5 & = & -1 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & & & - & 8x_5 & = & -1 \end{array}\right. \tag{31}$$

On commence par le mettre sous forme symbolique :

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & 2 & -2 & 8 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ -2 & -4 & -1 & 0 & -8 & -1 \end{array}\right)$$

Le pivot du système (le coefficient en haut à gauche) est égal à 0. On ne peut donc pas utiliser la première ligne pour éliminer la première inconnue des deuxième et troisième équations. Pour résoudre ce problème, on échange la première et la deuxième ligne :

$$\begin{array}{r} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 8 & -6 \\ -2 & -4 & -1 & 0 & -8 & -1 \end{array}\right)$$

On fait ensuite apparaître des 0 sous le pivot :

$$\begin{array}{r} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \tag{32}$$

Normalement, on devrait travailler ensuite sur le sous-système obtenu en éliminant la première ligne et la première colonne. Mais on a de la chance : ce système commence par une colonne de 0. On ne peut pas mettre davantage de 0 sur cette colonne. On travaille donc directement sur le sous-système obtenu en supprimant la première ligne et les deux premières colonnes du système (32). Le pivot de ce système est égal à 2. On commence par le rendre égal à 1 :

$$\begin{array}{r} L_1 \\ \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

puis on met des zéros sous le pivot

$$\begin{array}{r} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Le système est alors sous forme échelonné avec des 1 comme pivots. On a terminé la première phase. La deuxième phase consiste à mettre des 1 au dessus des pivots, en commençant par le dernier pivot.

$$\begin{array}{r} L_1 \\ L_2 + L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

On est arrivé au système échelonné réduit :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & & & + & 3x_5 & = & 2 \\ & & & x_3 & & + & 2x_5 & = & -3 \\ & & & & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \end{array}\right. \tag{33}$$

C'est exactement le système (18). L'ensemble S des solutions est :

$$S = \{(2 - 2x_2 - 3x_5, x_2, -3 - 2x_5, 2x_5, x_5), (x_2, x_5) \in \mathbb{R}^2\}$$

2.7 Mise d'un système sous forme échelonnée réduite - théorie

Proposition 2.1 *N'importe quel système linéaire peut se mettre par une suite d'opérations élémentaires sous une forme échelonnée avec des* 1 *comme pivots.*

Preuve. On fait une récurrence sur le nombre d'inconnues du systèmes. Soit H_p la propriété :

(H_p) : n'importe quel système linéaire à p inconnues peut être transformé par une suite d'opérations élémentaires en un système échelonné réduit avec des 1 comme pivots.

Prouvons que H_p est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. La preuve de H_1 est laissée au lecteur (pour prouver H_1 il suffit de procéder comme dans la preuve de $H_p \Rightarrow H_{p+1}$ ci-dessous). Montrons $H_p \Rightarrow H_{p+1}$.

Supposons H_p vraie. Considérons un système linéaire $(\mathcal{S})$ à $p+1$ inconnues.

Premier cas : si la première colonne comporte uniquement des coefficients nuls, c'est à dire si le tableau des coefficients est de la forme :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & * & .. & * & * \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & * & .. & * & * \end{array}\right)$$

(le symbole $*$ sur une case signifie que le coefficient situé sur cette case est quelconque). On considère alors le système linéaire $(\mathcal{S}')$ obtenu en supprimant la première colonne. Ce système linéaire a p inconnues et peut donc, par hypothèse de récurrence, être transformé en un système équivalent $(\mathcal{S}'')$ échelonné avec des 1 comme pivots. En rajoutant une colonne de 0 au système $(\mathcal{S}'')$, on obtient un système échelonné avec des 1 comme pivots qui est équivalent à $(\mathcal{S})$.

Deuxième cas : si les coefficients sur la première colonne ne sont pas tous nuls. Dans ce cas, quitte à échanger deux lignes, on peut se ramener à un système du type :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & * & .. & * & * \\ a'_{21} & * & .. & * & * \\ .. & .. & .. & .. & * \\ a'_{n1} & * & .. & .. & * \end{array}\right)$$

avec $a'_{11} \neq 0$. En divisant la première ligne par a'_{11}, on obtient un système du type :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & .. & * & * \\ a'_{21} & * & .. & * & * \\ .. & .. & .. & .. & * \\ a'_{n1} & * & .. & .. & * \end{array}\right)$$

puis pour tout $i \in \{2, ..., n\}$, on soustrait a'_{i1} fois la ligne 1 à la ligne i. On obtient alors un système de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c|} \multicolumn{1}{c}{1} & * & .. & \multicolumn{1}{c|}{*} & \multicolumn{1}{c}{*} \\ \cline{2-5} 0 & * & .. & * & * \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & * & .. & * & * \\ \cline{2-5} \end{array}\right) \tag{34}$$

Soit $(\mathcal{S}')$ le sous-système encadré ci-dessus, c'est à dire le système obtenu à partir du système (34) en supprimant la première ligne et la première colonne. $(\mathcal{S}')$ est un système à p inconnues. Par hypothèse de récurrence, on peut donc le transformer par une suite d'opérations élémentaires en un système échelonné avec des 1 comme pivots. En faisant les opérations correspondantes sur le système (34), on obtient un système échelonné avec des 1 comme pivots qui est équivalent à $(\mathcal{S})$.

Bilan : dans tous les cas, H_{p+1} est vraie. Donc, par récurrence, H_p est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. $\blacksquare$

Remarque : la preuve de la proposition fournit une méthode pour tranformer un système linéaire quelconque en un système échelonné : comme dans la preuve, on ramène le problème au fait de mettre sous forme échelonné un système $(\mathcal{S}')$ qui a une inconnnue de moins, puis on ramène le problème de mettre $(\mathcal{S}')$ sous forme échelonné au problème de mettre sous forme échelonnée un système contenant une inconnue de moins que $(\mathcal{S}')$, etc.

Proposition 2.2 *N'importe quel système linéaire peut se mettre sous forme échelonnée réduite par une suite d'opérations élémentaires.*

Preuve. D'après la proposition précédente, on peut mettre n'importe quel système sous forme échelonnée avec des 1 commes pivots. Il est alors facile de le transformer en un système échelonné réduit (il suffit de faire apparaître des 0 au dessus du dernier pivot, puis au dessus de l'avant-dernier pivot, etc, comme dans les exemples de la section 2.6). ■

3 Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

3.1 Forme générale d'un système échelonné réduit

Soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire de n équations à p inconnues. Nous avons vu qu'il existe toujours un système linéaire échelonné réduit $(\mathcal{S}')$ qui est équivalent à $(\mathcal{S})$. En supposant qu'on n'ait pas supprimé les lignes du type $0 = 0$, le système $(\mathcal{S}')$ est également un système de n équations à p inconnues. Notons r le nombre d'équations de $(\mathcal{S}')$ dont le premier membre est non nul. On peut montrer (voir cours du second semestre) que la valeur de r ne dépend que du système linéaire initial (autrement dit, dans tous les systèmes échelonnées réduits $(\mathcal{S}')$ équivalents à $(\mathcal{S})$, le nombre d'équations dont le premier membre est non nul est toujours le même). Cet entier r est appelé le rang du système linéaire $(\mathcal{S})$.

Premier cas : si dans le système $(\mathcal{S}')$ les inconnues liées sont celles qui ont les indices les plus bas.

$(\mathcal{S}')$ est alors un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & & & & + & a'_{1,r+1}x_{r+1} & \cdots & + & a'_{1,p}x_p & = & b'_1 \\
 & x_2 & & & + & a'_{2,r+1}x_{r+1} & \cdots & + & a'_{2,p}x_p & = & b'_2 \\
 & & \ddots & & + & \vdots & & + & \vdots & = & \vdots \\
 & & & x_r & + & a'_{r,r+1}x_{r+1} & \cdots & + & a'_{r,p}x_p & = & b'_r \\
 & & & & & & & & 0 & = & b'_{r+1} \\
 & & & & & & & & 0 & = & b'_{r+2} \\
 & & & & & & & & \vdots & = & \vdots \\
 & & & & & & & & 0 & = & b'_n
\end{array}\right.$$

Il y a $n - r$ lignes du type $0 = b'_i$ et $p - r$ inconnues libres.[6] En particulier, $r \leq n$ et $r \leq p$.

Si $r = n$ alors il n'y a pas de lignes $0 = b'_i$ et $(\mathcal{S}')$ est de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & & & & + & a'_{1,r+1}x_{r+1} & \cdots & + & a'_{1,p}x_p & = & b'_1 \\
 & x_2 & & & + & a'_{2,r+1}x_{r+1} & \cdots & + & a'_{2,p}x_p & = & b'_2 \\
 & & \ddots & & + & \vdots & & + & \vdots & = & \vdots \\
 & & & x_r & + & a'_{r,r+1}x_{r+1} & \cdots & + & a'_{r,p}x_p & = & b'_r
\end{array}\right.$$

Dans ce cas, le système est toujours compatible. En effet, on a toujours la solution $x_1 = b'_1$, ...,

[6] Vous n'êtes pas habitués au fait que le système comporte des lignes du type $0 = b'_i$ car, en pratique, quand on résoud un système linéaire sans paramètres et qu'on tombe sur une ligne du type $0 = b_i$, soit $b_i = 0$, et l'on élimine la ligne, soit $b_k \neq 0$, et l'on conclut directement que le système n'a pas de solutions ; toutefois, si vous mettez un système sous forme échelonnée réduite en vous interdisant de supprimer les lignes $0 = 0$, il se peut très bien qu'il y ait des lignes du type $0 = b_i$ dans le système final. En fait, ce sera le cas à chaque fois que le rang du système est strictement plus petit que le nombre d'équations.

$x_r = b'_r$, et $x_i = 0$ pour $i > r$. De plus, si $r < p$ alors il y une infinité de solutions et l'ensemble des solutions a $p - r$ degrés de liberté.[7]

Si $r = p$, il n'y a pas d'inconnues libres et $(\mathcal{S}')$ est de la forme :

$$\begin{cases} x_1 & & & & = & b'_1 \\ & x_2 & & & = & b'_2 \\ & & \ddots & & = & \vdots \\ & & & x_r & = & b'_r \\ & & & 0 & = & b'_{r+1} \\ & & & 0 & = & b'_{r+2} \\ & & & \vdots & = & \vdots \\ & & & 0 & = & b'_n \end{cases}$$

Dans ce cas, le système a au plus une solution. Plus précisément, s'il existe $i \in \{r+1, ..., p\}$ tel que $b'_i \neq 0$, le système n'a pas de solutions. Sinon, le système a exactement une solution.

Si $r = n = p$, $(\mathcal{S}')$ est de la forme :

$$\begin{cases} x_1 & & & & = & b'_1 \\ & x_2 & & & = & b'_2 \\ & & \ddots & & = & \vdots \\ & & & x_r & = & b'_r \end{cases}$$

Dans ce cas le système a exactement une solution.

Enfin, si $r < n$ et $r < p$, on ne sait pas si le système est compatible (car $r < n$), mais comme $r < p$, on peut montrer que si le système est compatible alors il a une infinité de solutions.

On peut résumer ces résultats par le tableau suivant :

	$r = p$	$r < p$
$r = n$	exactement une solution	une infinité de solutions
$r < n$	au plus une solution	soit pas de solutions soit une infinité de solutions

(35)

En particulier : s'il y a plus d'inconnues que d'équations ($n < p$), alors comme $r \leq n$, on a forcément $r < p$, donc le système n'a soit aucune solution, soit une infinité de solutions. En revanche, s'il y a plus d'équations que d'inconnues ($p < n$), on ne peut rien dire.

2nd cas : si dans le système $(\mathcal{S}')$, les inconnues liées ne sont pas celle qui ont les indices les plus bas (pas les r premières).

Alors en permutant des colonnes, on peut se ramener à un système échelonnée réduit $(\mathcal{S}'')$ où les inconnues liées sont situées sur les r premières colonnes. En raisonnant sur $(\mathcal{S}'')$, on montre que les résultats résumés dans le tableau (35) sont encore valables.

[7] Pour les redoublants : on peut montrer que l'application qui va de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S}')$ dans $\mathbb{R}^{p-r}$ et qui à la solution $(x_1, ..., x_r, x_{r+1}, ..., x_p)$ de $(\mathcal{S}')$ associe $(x_{r+1}, ..., x_p)$ est une application linéaire bijective ; l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S}')$ est donc isomorphe à $\mathbb{R}^{p-r}$.

3.2 Système homogène associé à un système linéaire, rang d'un système linéaire

Définition : un système est *homogène* (ou *sans second membre*) si les coefficients du second membre sont tous nuls.

Par exemple, dans (1), le système de gauche est homogène, mais pas les autres.

Définition : soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire. Le *système homogène associé* au système $(\mathcal{S})$ est le système qui a le même premier membre que $(\mathcal{S})$ mais où le second membre est nul.

Exemple : Le système homogène associé au système

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 6y & = & -3 \\ -2x & + & y & = & 12 \end{array}\right.$$

est

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 6y & = & 0 \\ -2x & + & y & = & 0 \end{array}\right.$$

Dans la section 3.1, on a déjà introduit la notion de rang d'un système linéaire. Voici une définition équivalente :

Définition-proposition Soit $(\mathcal{S})$ un système de n équations à p inconnues et $(\mathcal{S}_0)$ le système homogène associé. Si on transforme $(\mathcal{S}_0)$ en un système échelonné (ou échelonné réduit) et qu'on élimine les lignes $0 = 0$, on obtient un système de r équations. On admet (voir cours du second semestre) que cet entier r est indépendant de la manière dont on a opéré. On l'appelle *rang* du système linéaire $(\mathcal{S})$.[8]

Exercice (réponse dans la note de bas de page) : quel est le rang des systèmes (4), (11), (12), (15), (16), (18) et (31). [9]

Les propriétés suivantes sont des conséquences directes de la définition du rang et de l'examen de la forme générale d'un système échelonné réduit fait dans la section 3.1.

◇ un système linéaire et le système homogène qui lui est associé ont même rang.

◇ le rang de $(\mathcal{S})$ peut aussi être défini comme le nombre de pivots (ou d'inconnues liées) dans n'importe quel système échelonné équivalent à $(\mathcal{S})$.

◇ le rang est inférieur ou égal au nombre d'équations, ainsi qu'au nombre d'inconnues du système : $r \leq \min(n, p)$.

◇ si $r = n$, dans un système échelonné réduit équivalent à $(\mathcal{S})$, il ne peut pas y avoir de lignes du type $0 = \beta$. Le système admet donc au moins une solution.

◇ si $r = p$, il n'y a pas d'inconnues libres. Le système a donc au plus une solution.

◇ si $r = n = p$ (système carré de rang maximal), le système est dit “de Cramer". Il a exactement une solution.[10]

[8] En d'autre termes, n'importe quel système échelonné équivalent à $(\mathcal{S}_0)$ et ne contenant pas de lignes $0 = 0$ comporte le même nombre d'équations. Ce nombre s'appelle le rang de $(\mathcal{S})$. En fait, on peut même montrer que, parmi les systèmes ne comportant pas de lignes $0 = 0$, il existe un unique système échelonné réduit équivalent à $(\mathcal{S}_0)$.

[9] Les rangs sont, dans l'ordre, 2, 1, 3, 3, 2, 3 et 3.

[10] Attention : si un système est de Cramer, il a exactement une solution. Mais un système peut avoir exactement une

◇ si $r < p$, il y a au moins une inconnue libre. Si le système est compatible, il a donc une infinité de solutions.

◇ le rang d'un système n'indique pas, en général, si ce système est compatible ou non.

3.3 Solutions d'un système homogène

Notations : soient $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_p)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_p)$ deux p-uplets de réels, et λ un réel. On note respectivement $\lambda\mathbf{x}$ et $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ les p-uplets $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_p)$ et $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_p + y_p)$.

Considérons un système homogène $(\mathcal{S}_0)$ et notons S_0 l'ensemble de ses solutions. L'ensemble S_0 a trois propriétés fondamentales :

(a) S_0 est non vide (en effet, $(0, 0, ..., 0)$ est toujours solution) ;

(b) si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_p) \in S_0$, alors pour tout réel λ, $\lambda\mathbf{x} \in S_0$;

(c) si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_p) \in S_0$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_p) \in S_0$, alors $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S_0$.

Exercice (indications dans la note de bas de page) : prouver les propriétés (b) et (c).[11]

La propriété (b) a une conséquence immédiate :

Proposition 3.1 *L'ensemble des solutions d'un système homogène est soit égal à* $\{(0, 0, ..., 0)\}$, *soit infini.*

Preuve. $(0, 0, ...0)$ est toujours solution. De plus, s'il existe une solution non nulle $\mathbf{x}$, alors : d'une part, d'après la propriété (b), pour tout réel λ , $\lambda\mathbf{x}$ est solution ; d'autre part, comme $\mathbf{x}$ est non nul, l'ensemble des p-uplets de la forme $\lambda\mathbf{x}$ avec λ réel est infini ; donc le système a une infinité de solutions.[12] ■

En fait, en utilisant des définitions et résultats qui seront vus au second semestre, on peut dire beaucoup plus : pour dire qu'un ensemble vérifie les propriétés (b) et (c), on dit qu'il est *stable par combinaison linéaire*. Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$ qui est non vide et stable par combinaison linéaire s'appelle un *sous-espace vectoriel* de $\mathbb{R}^p$. Les propriétés (a), (b) et (c) s'expriment donc en disant que *l'ensemble des solutions d'un système homogène à p inconnues est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^p$.

De plus, dans n'importe quel système échelonné équivalent à $(\mathcal{S}_0)$, le nombre d'inconnues libres est égal à $p - r$, où r est le rang de $(\mathcal{S}_0)$. Les solutions du système s'expriment donc en fonction de $p - r$ variables, qui peuvent prendre n'importe quelles valeurs. Informellement, on peut dire que l'ensemble S_0 des solutions de $(\mathcal{S}_0)$ a $p - r$ “degrés de liberté". La notion vague de “degrés de liberté" sera remplacé au second semestre par la notion de “dimension", et on dira que S_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ *de dimension* $d = p - r$.

On verra qu'un tel espace a une structure bien particulière :

---

solution sans être de Cramer. En effet, n'importe quel système compatible dont le rang est égal au nombre d'inconnues a exactement une solution.

[11]Pour prouver (b), il suffit de remarquer que si $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ip}x_p = 0$ alors pour tout réel λ, on a : $a_{i1}(\lambda x_1) + a_{i2}(\lambda x_2) + ... + a_{ip}(\lambda x_p) = \lambda(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ip}x_p) = \lambda \times 0 = 0$. De même, pour prouver (c), il suffit de remarquer que si $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ip}x_p = 0$ et $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + ... + a_{ip}y_p = 0$, alors $a_{i1}(x_1 + y_1) + a_{i2}(x_2 + y_2) + ... + a_{ip}(x_p + y_p) = (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ip}x_p) + (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + ... + a_{ip}y_p) = 0 + 0 = 0$.

[12]On dit qu'une solution $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_p)$ est *non nulle* si les x_i ne sont pas tous nuls.

- si $d = 0$ ($r = p$), S_0 ne contient que le point $\{(0, 0, ..., 0)\}$.
- si $d = 1$ ($r = p - 1$), S_0 est une droite passant par $(0, 0, ..., 0)$.
- si $d = 2$ ($r = p - 2$), S_0 est un plan contenant $(0, 0, ..., 0)$.
- si $d = 3$ ($r = p - 3$), S_0 est un espace à trois dimensions contenant $(0, 0, ..., 0)$.
- si $d > 3$, S_0 est un espace “du même type" mais de “dimension" plus grande.

Pour $d \geq 1$, le fait que l'ensemble S_0 des solutions d'un système homogène ait dimension d signifie que n'importe quelle solution de ce système peut s'exprimer comme “combinaison linéaire" de d solutions “de base", et qu'il n'est pas possible d'exprimer toutes les solutions du système comme combinaison linéaire de moins de d solutions. Ce vocabulaire sera précisé au second semestre.

Exemple : considérons le système homogène associé au système (33) :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & & & & + & 3x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & & + & 2x_5 & = & 0 \\ & & & & & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions de ce système est :

$$S = \{(-2x_2 - 3x_5, x_2, -2x_5, 2x_5, x_5), (x_2, x_5) \in \mathbb{R}^2\}$$

Ici, $p = 5$, $r = 3$ donc $d = 5 - 3 = 2$. On peut exprimer n'importe quelle solution en fonctions des solutions $\mathbf{s}_2 = (-2, 1, 0, 0, 0)$ et $\mathbf{s}_5 = (-3, 0, -2, 2, 1)$ (obtenues respectivement pour $x_2 = 1$, $x_5 = 0$, et pour $x_2 = 0$, $x_5 = 1$). En effet, l'ensemble des solutions peut s'écrire sous la forme :

$$S_0 = \{x_2(-2, 1, 0, 0, 0) + x_5(-3, 0, -2, 2, 1), (x_2, x_5) \in \mathbb{R}^2\} = \{x_2\mathbf{s}_2 + x_5\mathbf{s}_5, (x_2, x_5) \in \mathbb{R}^2\}$$

Vous verrez au second semestre que S_0 s'interprète géométriquement comme un plan.

Exercice : pour tous les systèmes linéaires que nous avons considérés, déterminer la dimension d de l'ensemble des solutions du système homogène associé. Lorsque $d \geq 1$, exprimer l'ensemble des solutions en fonction des d solutions telles que l'une des variables libres vaut 1 et les autres variables libres valent 0.

3.4 Solutions d'un système linéaire quelconque

On a vu qu'un système homogène avait toujours au moins la solution $(0, 0, ..., 0)$. En revanche, un système non homogène n'a pas forcément de solutions. On dit alors qu'il est incompatible.

Exemple : le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 5 \\ x & + & y & = & 7 \end{array} \right. \tag{36}$$

est incompatible.

Nous allons maintenant voir que quand le système est compatible, l'ensemble de ses solutions est relié de manière précise à l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire. Soit $(\mathcal{S}_0)$ le système homogène associé. Soit S et S_0 l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ et de $(\mathcal{S}_0)$, respectivement. Pour tout $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_p) \in R^p$, on note

$$\mathbf{x} + S_0 = \{\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{y} \in S_0\} = \{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^p, \exists \mathbf{y} \in S_0, \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{y}\}$$

l'ensemble des p-uplet de réels de la forme $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ avec $\mathbf{y} \in S_0$.

Proposition 3.2 *Si le système linéaire $(\mathcal{S})$ admet la solution $\boldsymbol{x}$, alors*

$$S = \boldsymbol{x} + S_0$$

Preuve. Soit $(\mathcal{S})$ le système générique (2). Soit $\mathbf{x}$ une solution de $(\mathcal{S})$. Montrons $S \subset \mathbf{x} + S_0$ par double inclusion. Montrons tout d'abord $S \subset \mathbf{x} + S_0$. Soit $\mathbf{x}' = (x_1', x_2', ..., x_p') \in S$. Soit $\mathbf{y} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$. Soit $i \in \{1, ..., n\}$. On a :

$$\begin{aligned} a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + ... + a_{ip}y_p &= a_{i1}(x_1' - x_1) + a_{i2}(x_2' - x_2) + ... + a_{ip}(x_p' - x_p) \\ &= (a_{i1}x_1' + a_{i2}x_2' + ... + a_{ip}x_p') - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ip}x_p) \end{aligned}$$

Or $\mathbf{x}'$ et $\mathbf{x}$ sont solutions de $(\mathcal{S})$, donc

$$a_{i1}x_1' + a_{i2}x_2' + ... + a_{ip}x_p' = b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ip}x_p$$

Donc $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + ... + a_{ip}y_p = 0$. Comme ceci est vrai pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $\mathbf{y}$ est solution de $(\mathcal{S}_0)$. Or $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Donc $\mathbf{x}' \in \mathbf{x} + S_0$, donc $S \subset \mathbf{x} + S_0$.

Montrons maintenant $\mathbf{x} + S_0 \subset S$. Soit $\mathbf{y} \in S_0$ et $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$,

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1' + a_{i2}x_2' + ... + a_{ip}x_p' &= a_{i1}(x_1 + y_1) + a_{i2}(x_2 + y_2) + ... + a_{ip}(x_p + y_p) \\ &= (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ip}x_p) + (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + ... + a_{ip}y_p) \\ &= b_i + 0 \\ &= b_i \end{aligned}$$

Donc $\mathbf{x}' \in S$. Donc $\mathbf{x} + S_0 \subset S$, et par double inclusion, $S = \mathbf{x} + S_0$. ∎

La proposition précédente se retient de la manière suivante : *la solution générale d'un système linéaire est donnée par la somme d'une solution particulière de ce système et de la solution générale du système homogène associé.*

Proposition 3.3 *Un système linéaire n'a soit aucune solution, soit exactement une solution, soit une infinité de solutions.*

Preuve. Si un système linéaire est compatible, alors, d'après la proposition précédente 3.2, l'ensemble S de ses solutions est en bijection avec l'ensemble des solutions du système homogène associé. D'après la proposition 3.1, S a donc soit un seul élément, soit une infinité. ∎

Géométriquement, l'égalité $S = \mathbf{x} + S_0$ de la proposition 3.2 s'interprète de la manière suivante : si $\mathbf{x}$ est solution de $(\mathcal{S})$, alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est l'image par la translation de vecteur $\mathbf{x}$ de l'ensemble des solutions du système homogène associé. **Si** l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est non vide, il a donc la même "forme" que l'ensemble des solutions du système homogène associé. C'est donc soit un point (si $r = p$), soit une droite (si $r = p - 1$), soit un plan (si $r = p - 2$), soit un espace à trois dimensions (si $r = p - 3$), soit un espace "du même type" mais de plus grande dimension.[13]

[13] Si le système n'est pas homogène, alors $(0, 0, ..., 0)$ n'est pas solution. Considérons par exemple un système linéaire $(\mathcal{S})$ non homogène, compatible, et de rang $r = p - 1$. L'ensemble des solutions du système homogène associé est alors une droite passant par $(0, 0, ..., 0)$ et l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ une droite ne passant pas par $(0, 0, ..., 0)$.

Exemple Considérons le système $(\mathcal{S})$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & & & 2x_3 & - & 2x_4 & + & 8x_5 & = & -6 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & + & 5x_5 & = & -1 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & & & - & 8x_5 & = & -1 \end{array}\right. \tag{37}$$

Le système homogène associé $(\mathcal{S}_0)$ est :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & & & 2x_3 & - & 2x_4 & + & 8x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & + & 5x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & & & - & 8x_5 & = & 0 \end{array}\right. \tag{38}$$

En résolvant $(\mathcal{S}_0)$ on trouve que l'ensemble S_0 des solutions de $(\mathcal{S}_0)$ est :

$$S_0 = \{(-2x_2 - 3x_5, x_2, -2x_5, 2x_5, x_5), (x_2, x_5) \in \mathbb{R}^2\}$$

De plus, $(2, 0, -3, 0, 0)$ est solution de $(\mathcal{S})$. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est donc

$$S = (2, 0, -3, 0, 0) + S_0 = \left\{(2 - 2x_2 - 3x_5, x_2, -3 - 2x_5, 2x_5, x_5), (x_2, x_5) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

On verra au second semestre que S s'interprète géométriquement comme un plan, c'est à dire un espace à deux dimensions.

Remarques :

- la solution $(2, 0, 3, 0, 0)$ ne saute pas aux yeux, mais dans certains systèmes il y a une solution évidente. Plutôt que de résoudre le système initial, il est alors plus rapide de résoudre le système homogène associé (qui a l'avantage que le second membre est toujours nul, donc moins de calculs à faire) et d'utiliser la proposition 3.2.

- quand un système linéaire a une infinité de solutions, il y a le plus souvent plusieurs manières de décrire l'ensemble des solutions. Par exemple, $(0, 1, -3, 0, 0)$ est une solution particulière de $(\mathcal{S})$. On a donc aussi

$$S = (0, 1, -3, 0, 0) + S_0 = \left\{(-2x_2 - 3x_5, 1 + x_2, -3 - 2x_5, 2x_5, x_5), (x_2, x_5) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

C'est une autre manière de décrire l'ensemble des solutions que celle donnée plus haut, tout aussi valable.

Exercice : montrer en raisonnant pas double inclusion qu'on a bien

$$\begin{array}{rl} & \{(2 - 2x_2 - 3x_5, x_2, -3 - 2x_5, 2x_5, x_5), (x_2, x_5) \in \mathbb{R}^2\} \\ = & \{(-2x_2 - 3x_5, 1 + x_2, -3 - 2x_5, 2x_5, x_5), (x_2, x_5) \in \mathbb{R}^2\} \end{array}$$

Exercice : Considérons le système $(\mathcal{S})$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & & & 2x_3 & - & 2x_4 & + & 8x_5 & = & -6 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & + & 5x_5 & = & -1 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & & & - & 8x_5 & = & -1 \\ -x_1 & - & 2x_2 & & & & & - & 3x_5 & = & 4 \end{array}\right. \tag{39}$$

Montrer que le système homogène associé à $(\mathcal{S})$ à les mêmes solutions que le système (38), mais que $(\mathcal{S})$ n'a pas de solutions. Question subsidiaire : comment l'auteur de ces lignes a-t-il construit cet exercice, presque sans faire de calculs, à partir de l'exemple précédent.

4 Systèmes avec paramètres

On considère dans cette sections des systèmes linéaires comportant des paramètres, comme les systèmes suivants, d'inconnues x et y, et de paramètres a et b.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & + & 6y & = & a \\ -2x & + & y & = & b \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} 3ax & + & 6y & = & 0 \\ -2x & + & by & = & 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} 3ax & + & 6y & = & b \\ -2x & + & by & = & 0 \end{array}\right.$$

4.1 Paramètres au second membre uniquement

Lorsqu'un système linéaire ne comporte de paramètres qu'au second membre, le mettre sous forme échelonnée ne pose pas de difficultés. On procède comme s'il n'y avait pas de paramètres. Une fois que le système est mis sous forme échelonnée réduite, il y a deux cas :

1er cas : si le système ne comporte pas de ligne du type $0 = f(\text{paramètres})$ où $f(\text{paramètres})$ désigne une expression qui dépend de paramètres (ce cas se produit notamment lorsque $r = n$). Dans ce cas, la présence de paramètres ne change rien : s'il y a des lignes du type $0 = \alpha$ avec $\alpha \neq 0$, le système n'a pas de solutions, sinon, on exprime les solutions en fonctions des paramètres.

2nd cas : si le système comporte $k \geq 1$ lignes du type $0 = f_1(\text{paramètres})$, $0 = f_2(\text{paramètres})$,..., $0 = f_k(\text{paramètres})$, où $f_i(\text{paramètres})$ désigne une expression qui dépend de paramètres. Le fait que le système comporte des lignes du type $0 \neq 0$ peut alors dépendre de la valeur des paramètres. On poursuit ainsi : si les valeurs des paramètres sont telles que $f_i(\text{paramètres}) = 0$ pour tout $i \in \{1, ..., k\}$, on est ramené au 1er cas. Sinon, le système n'a pas de solutions.

Exercice : Déterminer les solutions du système $(\mathcal{S})$ suivant en fonction des valeurs des paramètres réels a, b, c, d.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} & & & & 2x_3 & - & 2x_4 & + & 8x_5 & = & a \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & + & 5x_5 & = & b \\ -2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & & & - & 8x_5 & = & c \\ -x_1 & - & 2x_2 & & & & & - & 3x_5 & = & d \end{array}\right. \tag{40}$$

Solution : (je passe les calculs) le système est équivalent au système sous forme échelonnée réduite

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcc} x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & 3x_5 & = & -b-c \\ & & & & x_3 & & & + & 2x_5 & = & 2b+c \\ & & & & & & x_4 & - & 2x_5 & = & -a/2+2b+c \\ & & & & & & & & 0 & = & -b-c+d \end{array}\right.$$

Il y a donc deux cas : si $d \neq b + c$, le système n'a pas de solutions. Si $d = b + c$ la dernière équation est toujours satisfaite et l'ensemble des solutions est

$$S = \{([-b-c-2x_2+3x_5], x_2, [2b+c-2x_5], [-a/2+2b+c-2x_5], x_5), (x_2, x_5) \in \mathbb{R}^2\}$$

4.2 Paramètres au premier membre

La situation est plus délicate. En effet, pour mettre un système sous forme échelonnée réduite, on doit parfois faire des opérations du type (a) $L_k \leftarrow \lambda L_k$, (b) $L_k \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_k$ ou leurs variantes (a') $L_k \leftarrow \lambda L_k + L_i$, (b') $L_k \leftarrow L_k + \frac{1}{\lambda} L_i$, où λ est un coefficient du premier membre. Or, si $\lambda = 0$, le système obtenu en faisant l'opération (a) ou l'opération (a') n'est en général pas équivalent au système initial ; quand aux opérations (b) et (b'), elles n'ont carrément pas de sens, et quand on a l'impression (fausse) qu'on peut leur donner un sens, le système qu'on obtient n'est en général pas équivalent au système initial.

La règle d'or est la suivante : *lorsqu'on veut faire une opération du type $L_k \leftarrow \lambda L_k$ ou bien diviser quelque chose par λ, et que λ est une expression dépendant de paramètres, il faut distinguer le cas $\lambda = 0$ du cas $\lambda \neq 0$.*

Dans le cas $\lambda \neq 0$, on peut faire l'opération voulue. Dans le cas $\lambda = 0$, on ne peut pas, mais la nouvelle information $\lambda = 0$ nous permet de poursuivre la résolution.

Remarque : bien distinguer l'opération $L_k \leftarrow L_k + \lambda L_i$, toujours permise quand $k \neq i$, de l'opération $L_k \leftarrow \lambda L_k + L_i$, interdite quand $k \neq i$ et $\lambda = 0$.

Pour éviter d'avoir trop de cas à distinguer dès les premières phases de la résolution, on peut :

- Echanger deux lignes afin de faire apparaître un pivot qui ne comprend pas de paramètres
- Ne pas systématiquement se ramener au cas où le pivot vaut 1.
- D'une manière générale, ne pas utiliser la méthode du pivot de manière rigide, mais l'adapter afin de distinguer le moins de cas possibles.

4.2.1 Paramètres aux deux membres

On combine simplement la méthode de résolution des systèmes avec paramètres au 1er membre avec la méthode de résolution des systèmes avec paramètres au 2nd membre.

4.3 Exemples de résolutions correctes et incorrectes d'un même système linéaire avec paramètres

Voici l'énoncé : déterminer l'ensemble S des solutions du système $(\mathcal{S})$ ci-dessous, en fonction de la valeur du paramètre a.

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} ax & + & ay & = & a \\ x & + & y & = & 2 \end{array} \right.$$

4.3.1 Première méthode correcte (traiter le cas $a = 0$ à part)

1er cas : si $a \neq 0$. On a alors :

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{array}{r} \frac{1}{a}L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{r} L_1 \\ L_2 - L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ & & 0 & = & 1 \end{array} \right.$$

et le système n'a pas de solution : $S = \emptyset$.

2nd cas : si $a = 0$. Le système s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} & & 0 & = & 0 \\ x & + & y & = & 2 \end{array} \right.$$

et l'ensemble des solutions est $S = \{(2 - y, y), y \in \mathbb{R}\}$.

Conclusion : si $a \neq 0$, il n'y a pas de solutions : $S = \emptyset$; si $a = 0$, l'ensemble des solutions est $S = \{(2 - y, y), y \in \mathbb{R}\}$

4.3.2 Seconde méthode correcte (changer de pivot)

Dans la résolution ci-dessus, le coefficient en haut à gauche (le pivot) était potentiellement nul, ce qui amenait à distinguer le cas où il était nul du cas où il ne l'était pas. Ci-dessous, pour éviter d'avoir à distinguer des cas dès le début, on intervertit deux lignes, afin de se retrouver avec un pivot dont on est sûr qu'il est non nul.

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{array}{r} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2 \\ ax & + & ay & = & a \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{r} L_1 \\ L_2 - aL_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2 \\ & & 0 & = & -a \end{array} \right.$$

Conclusion : si $a \neq 0$, il n'y a pas de solutions : $S = \emptyset$; si $a = 0$, l'ensemble des solutions est $S = \{(2-y, y), y \in \mathbb{R}\}$

4.3.3 Méthodes incorrectes

Trouvez l'erreur dans les résolutions 1), 1'), 2) et 2') ci-dessous. Vous constaterez que dans chacun de ces exemples, l'erreur commise conduit à une conclusion fausse.

1)

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{array}{r} \frac{1}{a}L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{r} L_1 \\ L_2 - L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ & & 0 & = & 1 \end{array} \right.$$

Conclusion : quelle que soit la valeur de a, le système n'a pas de solutions : $S = \emptyset$.

1') (variante de l'erreur précédente) :

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{array}{r} L_1 \\ L_2 - \frac{1}{a}L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcr} ax & + & ay & = & a \\ & & 0 & = & 1 \end{array} \right.$$

Conclusion : quelle que soit la valeur de a, le système n'a pas de solutions : $S = \emptyset$.

2)

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{array}{r} L_1 \\ aL_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcr} ax & + & ay & = & a \\ ax & + & ay & = & 2a \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{r} L_1 \\ L_2 - L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcr} ax & + & ay & = & a \\ & & 0 & = & a \end{array} \right.$$

Conclusion : si $a \neq 0$, il n'y a pas de solutions : $S = \emptyset$; si $a = 0$, l'ensemble des solutions est $S = \mathbb{R}^2$.

2') (variante de l'erreur précédente)

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{array}{r} L_1 \\ aL_2 - L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcr} ax & + & ay & = & a \\ & & 0 & = & a \end{array} \right.$$

Conclusion : si $a \neq 0$, il n'y a pas de solutions : $S = \emptyset$; si $a = 0$, l'ensemble des solutions est $S = \mathbb{R}^2$.

5 Matrices et systèmes linéaires

5.1 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Considérons un système linéaire de n équations à p inconnues

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = b_2 \\ \quad\quad\quad \vdots \quad \vdots & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = b_n \end{array}\right. \tag{41}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ la matrice des coefficients du premier membre et B la matrice (ou vecteur) colonne des coefficients du second membre :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & .. & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2p} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{np} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix}$$

Résoudre le système linéaire (41) revient à trouver les vecteurs colonnes à p composantes

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_p \end{pmatrix}$$

tels que

$$AX = B \tag{42}$$

où AX est le produit matriciel de la matrice A et du vecteur X.

Exemple :

Le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 8 \\ & & & & 4x_3 & = & 4 \end{array}\right.$$

s'écrit de manière matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5.2 Interprétation matricielle des opérations élémentaires

Considérons un système linéaire sous forme matricielle $AX = B$, où $A \in \mathcal{M}_{n,p}$.

Proposition 5.1 *Soit $P \in \mathcal{M}_n$ une matrice inversible. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}$. On a :*

$$PAX = PB \Leftrightarrow AX = B$$

Preuve. Si $AX = B$, alors $(PA)X = P(AX) = PB$. Réciproquement, si $(PA)X = PB$ alors, puisque P est inversible, $P^{-1}(PA)X = P^{-1}(PB)$ donc $I_nAX = I_nB$ donc $AX = B$. ∎

Ainsi, si on multiplie l'égalité $AX = B$ par une matrice inversible, on transforme le système initial en un système équivalent. On va voir dans cette section que les opérations élémentaires sur un système correspondent à multiplier l'égalité $AX = B$ par des matrices inversibles particulières.

Considerons un système linéaire $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient i et j des éléments de $\{1, 2, ..., n\}$. On définit les matrices $P(i, \lambda)$, $Q(i, j)$ et $R(i, j, \lambda)$ de la manière suivante :

$\diamond$ $P(i, \lambda)$ est la matrice $n \times n$ obtenue à partir de la matrice identité en multipliant la $i$ème ligne par λ, c'est à dire la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 sauf le $i$ème qui vaut λ.

$\diamond$ $Q(i, j)$ est la matrice qu'on obtient à partir de la matrice identité en échangeant la ligne i avec la ligne j.

$\diamond$ $R(i, j, \lambda)$ est la matrice qu'on obtient à partir de la matrice identité en rajoutant λ fois la ligne j à la ligne i. On a donc $R(i, j, \lambda) = I_n + \lambda E^{ij}$ où I_n est la matrice identité d'ordre n et E^{ij} la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé sur la ligne i et la colonne j qui vaut 1.

Exemple. Pour $n = 6$, $i = 2$ et $j = 5$, on a :

$$I_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P(2, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q(2, 5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R(2, 5, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 5.2 *Considérons le système linéaire $AX = B$.*

1. *Multiplier par λ la ligne i revient à multiplier l'égalité $AX = B$ par $P(i, \lambda)$, c'est à dire à transformer le système $AX = B$ en le système $PAX = PB$, où $P = P(i, \lambda)$.*
2. *Echanger les lignes i et j du système linéaire $AX = B$ revient à multiplier l'égalité $AX = B$ par $Q(i, j)$, c'est à dire à transformer le système $AX = B$ en le système $QAX = QB$, où $Q = Q(i, j)$*
3. *Ajouter λ fois la ligne j à la ligne i revient à multiplier l'égalité $AX = B$ par $R(i, j, \lambda)$, c'est à dire à transformer le système $AX = B$ en le système $RAX = RB$, où $R = R(i, j, \lambda)$.*

Preuve. On l'admet (c'est un calcul simple mais un peu long à écrire : essayez de le faire). ∎

Proposition 5.3 *Soient i et j des entiers dans $\{1, 2, ..., n\}$.*

1. *Si $\lambda \neq 0$, la matrice $P(i, \lambda)$ est inversible, d'inverse $P(i, 1/\lambda)$.*
2. *La matrice $Q(i, j)$ est inversible, d'inverse elle-même*
3. *Si $i \neq j$, que λ soit nul ou non, la matrice $R(i, j, \lambda)$ est inversible, d'inverse $R(i, j, -\lambda)$.*

Preuve. Preuve du 1. D'après la proposition précédente, la matrice $P(i,1/\lambda)P(i,\lambda)$ est la matrice qu'on obtient en multipliant par $1/\lambda$ la ième ligne de $P(i,\lambda)$, c'est donc la matrice I_n. Donc $P(i,\lambda)$ est inversible d'inverse $P(i,1/\lambda)$. Les autres preuves sont similaires. ■

Définition On dit qu'une matrice est échelonnée si toute ligne non nulle commence par davantage de 0 que la précédente. Les coefficients qui viennent en tête des lignes non nulles d'une matrice échelonnée s'appellent les pivots de la matrice. On dit qu'une matrice est échelonnée réduite si elle est échelonnée, si les pivots sont égaux à 1, et si les coefficients situés au dessus des pivots sont des 0.

Appelons *matrice d'opération élémentaire* toute matrice qui est de la forme $P(i,\lambda)$ (avec $\lambda \neq 0$), $Q(i,j)$, ou $R(i,j,\lambda)$ (avec $i \neq j$). Souvenons-nous de la proposition 2.2, qui dit que tout système linéaire peut être transformé en un système échelonné réduit par une suite d'opérations élémentaires. Cette proposition s'interprête matriciellement de la manière suivante :

Proposition 5.4 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ une matrice. Il existe un entier k et des matrices d'opération élémentaire P_1, P_2, ..., P_k telles que la matrice $P_kP_{k-1}...P_2P_1A$ est échelonné réduite (le système $P_kP_{k-1}...P_2P_1A = P_kP_{k-1}...P_2P_1B$ est alors échelonné réduit et équivalent à $AX = B$).*

5.2.1 Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot

Proposition 5.5 *Soit $A \in \mathcal{M}_n$. Supposons qu'en faisant une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A, on parvienne à la transformer en la matrice identité I_n. Alors la matrice A est inversible et en faisant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice I_n on obtient à la fin la matrice A^{-1}.*

Preuve. Supposons qu'en faisant une suite de k opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A, on parvienne à la transformer en la matrice identité I_n. Cela veut dire qu'il existe un entier k et des matrices d'opération élémentaire P_1, P_2, ..., P_k telles que $P_kP_{k-1}...P_2P_1A = I_n$. Soit $B = P_kP_{k-1}...P_2P_1$. On a $BA = I_n$, donc A est inversible et $A^{-1} = B$. De plus, en faisant la même suite d'opérations élémentaires à partir de la matrice I_n on obtient la matrice $P_kP_{k-1}...P_2P_1I_n = P_kP_{k-1}...P_2P_1 = A^{-1}$. ■

Exemple :
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On forme le tableau contenant A dans la partie gauche et I_3 dans la partie droite :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Puis on fait des opérations élémentaires sur les lignes de manière à mettre la partie gauche sous forme échélonné réduite :

$$\begin{array}{r} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3+2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} L_1 \\ \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} L_1-L_3 \\ L_2-2L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -9/2 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} L_1-L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -9/2 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On est parvenu à transformer la partie de gauche en le tableau correspondant à I_3. La matrice A est donc inversible, d'inverse :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/2 & -1/2 & 1 \\ -9/2 & 1/2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un conseil : à ce stade, vérifiez vos calculs en multipliant A et la matrice que vous avez trouvée pour A^{-1}. Si vous ne vous êtes pas trompés, vous devez trouver I_n (I_3 ici).

Définition-proposition : soit $A \in M_{n,p}$. D'après la définition du rang d'un système linéaire, il est clair que tous les systèmes linéaires du type $AX = B$ ont le même rang. Ce rang s'appelle le rang de A (une autre définition du rang d'une matrice, équivalente mais plus naturelle, sera donnée dans le cours du second semestre).

Soit $A \in M_n$. A peut-être transformé par une suite d'opération élémentaires en une matrice échelonnée réduite $A' = PA$ (où P est une matrice inversible produit de matrices d'opérations élémentaires). Il y a deux cas :

Cas 1 : si A' a n pivots, alors comme A' est une matrice $n \times n$, ces pivots sont nécessairement situés sur la diagonale. On a donc $A' = I_n$, donc $PA = I_n$. Donc A est inversible d'inverse P^{-1}.

Cas 2 : si A' à $r < n$ pivots, alors comme A' est une matrice $n \times n$, la dernière ligne de A' est nécessairement nulle. Ceci implique que A' n'est pas inversible (preuve en note[14]). Donc A n'est pas inversible car sinon $A' = PA$ le serait comme produit de matrices inversibles.

Ces observations permettent de prouver les résultats suivants.

Proposition 5.6 *Soit $A \in M_n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) A est inversible

[14]montrons qu'une matrice qui a une ligne nulle n'est pas inversible : soit M une matrice $n \times n$ dont la kième ligne est nulle. En notant L la matrice ligne $1 \times n$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la $k$ième qui vaut 1, on a $LM = 0$ (faites-le calcul) ; si M était inversible on aurait donc $L = LMM^{-1} = 0M^{-1} = 0$, ce qui est impossible car L est non nulle. Donc M n'est pas inversible.

2) il existe une matrice obtenue à partir de A par une suite d'opérations élémentaires qui est inversible.

3) il existe une matrice obtenue à partir de A par une suite d'opérations élémentaires qui est égale à I_n.

4) toute matrice échelonnée réduite obtenue à partir de A par une suite d'opérations élémentaires est égale à I_n.

Preuve. Soit A' une matrice échelonnée réduite obtenue à partir de A par une suite d'opérations élémentaires. Si A' n'est pas égale à I_n, alors, comme expliqué dans le cas 2 ci-dessus, A n'est pas inversible. Donc si 4) est fausse, 1) est fausse et donc par contraposée 1) implique 4). Le fait que 4) implique 3) et que 3) implique 2) est évident. Enfin, soit A' une matrice obtenue à partir de A par une suite d'opérations élémentaires. Il existe une matrice inversible P telle que $A' = PA$. Donc si A' est inversible, alors $A = P^{-1}A'$ l'est aussi comme produit de matrices inversibles. Donc 2) implique 1). Donc (preuve cyclique) les propositions 1) à 4) sont équivalentes. ■

Proposition 5.7 *Soit $A \in M_n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) A n'est pas inversible

2) il existe une matrice obtenue à partir de A par une suite d'opérations élémentaires qui n'est pas inversible.

3) il existe une matrice obtenue à partir de A par une suite d'opérations élémentaires qui comporte une ligne de 0

4) toute matrice échelonnée réduite obtenue à partir de A par une suite d'opérations élémentaires comporte une ligne de 0.

Preuve. Si A n'est pas inversible et que A' est une matrice échelonnée réduite obtenue à partir de A par une suite d'opérations élémentaires, on a forcément $A' \neq I_n$ (sinon A serait inversible d'après la proposition précédente). Donc, comme toute matrice carrée échélonnée réduite différente de l'identité, A' comporte une ligne de 0. Donc 1) implique 4). Le fait que 4) implique 3) est évident, et le fait que 3) implique 2) aussi puisqu'une matrice qui comporte une ligne de 0 n'est pas inversible. Enfin, si A' est une matrice obtenue à partir de A par une suite d'opérations élémentaires, alors il existe une matrice P inversible telle que $A' = PA$. Si A' n'est pas inversible, alors A ne l'est pas non plus (sinon A' le serait comme produit de matrices inversibles). Donc 2) implique 1), et les proposition 1) à 4) sont bien équivalentes. ■

Proposition 5.8 *Soit $A \in M_n$. A est inversible si et seulement si A est de rang n.*

Preuve. Par définition, A est de rang n si et seulement si toute matrice échelonnée réduite A' obtenue à partir de A par une suite d'opérations élémentaires à n pivots. Or comme A' est carrée, A' a n pivots si et seulement si $A' = I_n$. Le résultat est donc une conséquence de l'équivalence de 1) et de 3) dans la proposition 5.6. ■

On peut maintenant préciser ce qui se passe quand on utilise la méthode de calcul de l'inverse d'une matrice avec une matrice A non inversible : soit $A \in M_n$. Si A est inversible, alors en faisant sur I_n une suite d'opérations qui transforme A en une matrice échelonné réduite (donc ici en I_n), on obtient la matrice A^{-1}, comme dans l'exemple précédent. Si A n'est pas inversible, en transformant A en une matrice échelonné réduite, on obtient une matrice qui comporte une ligne de 0. On peut alors conclure que A n'est pas inversible.

6 Ce qu'il faut absolument retenir

Outre la méthode pratique de résolution d'un système linéaire, avec ou sans paramètres, il faut absolument retenir les propriétés suivantes :

$\diamond$ n'importe quel système linéaire peut être transformé en un système échelonné réduit équivalent

$\diamond$ le nombre r d'équation dont le premier membre n'est pas nul dans ce système échelonné réduit ne dépend que du système initial. Ce nombre est appelé le rang du système. Il est égal au nombre d'inconnues liées.

$\diamond$ l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est non vide et stable par addition et multiplication par une constante. De plus, si un système linéaire homogène à p inconnues est de rang r, alors l'ensemble de ses solution a $p-r$ "degrés de liberté" (autant que d'inconnues libres). Si $r = p$, le système a une solution unique ; si $r < p$, il a une infinité de solutions.

$\diamond$ un système linéaire non homogène n'est pas forcément compatible. S'il est compatible, sa solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système linéaire homogène associé. De ce fait, un système linéaire a toujours zéro, une unique, ou une infinité de solutions.

$\diamond$ un système linéaire peut être écrit sous forme d'une équation matricielle.

$\diamond$ les opérations élémentaires sur les lignes s'interprètent alors comme la multiplication à gauche par des matrice inversibles ; le fait qu'on puisse mettre n'importe quelle système sous forme échelonnée réduite implique que, pour toute matrice A, il existe une matrice inversible P telle que PA est échelonnée réduite.

$\diamond$ soit A une matrice carré $n \times n$. Supposons que par une suite d'opération élémentaires, on transforme A en une matrice A' échelonnée réduite. Alors : si $A' \neq I_n$, A n'est pas inversible ; si $A' = I_n$ alors A est inversible et l'inverse de A est la matrice obtenue en faisant la même suite d'opérations élémentaires à partir de la matrice I_n. Ceci donne une méthode pratique de calcul de l'inverse.

$\diamond$ une matrice carrée $n \times n$ est inversible si et seulement si elle est de rang n.