Contrôle continu d'algèbre 1

Durée 1h10. Tous documents et calculatrices interdits. Le barême, sur 21 points, est approximatif. Sauf indication contraire, les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 (2,5 pts) **Sans justifier**, donner la négation des propositions P et Q suivantes :

P : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{N}^3, \big(\left[\exists (q_1,q_2) \in \mathbb{N}^2, (a = bq_1 \text{ et } b = cq_2)\right] \Rightarrow [\exists q_3 \in \mathbb{N}, a = cq_3] \big)$

Q : $\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \exists (q_1,q_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (a = bq_1 \text{ ou } b = aq_2)$

Exercice 2 (2 pts) Soit $a \in \mathbb{R}$. **Sans justifier**, dire ce que valent les ensembles suivants :

a) $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]a, a+1/n[$; b) $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]a, a+1/n[$; c) $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [a, a+1/n]$

Exercice 3 (4 pts) Soient E, F, G des ensembles. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications. Rédémontrer les propriétés suivantes :

a) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

b) Pour toutes parties B et B' de F, on a $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

Exercice 4 (6,5 pts) (dans les questions b) et c), un dessin pertinent donne la moitié des points) Soient E un ensemble et A, B, C des parties de E.

a) Montrer que $A \backslash B = C_A(A \cap B)$. En déduire que si $A \backslash B = A \backslash C$ alors $A \cap B = A \cap C$.

b) Donner un exemple où : $A \backslash B = A \backslash C$ et $B \neq C$.

c) Donner un exemple où : $B \backslash A = C \backslash A$ et $B \neq C$.

d) Démontrer que si ($A \backslash B = A \backslash C$ et $B \backslash A = C \backslash A$) alors $B = C$.

Exercice 5 (5 pts) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x/(1+x^2)$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de la valeur de y, les réels x tels que $yx^2 - 2x + y = 0$
2. f est-elle injective ? (on pourra s'intéresser à l'équation $f(x) = y$).
3. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. L'application f est-elle surjective ?
4. Déterminer $f(\mathbb{R}_+)$.
5. En justifiant, donner un exemple de partie B de $\mathbb{R}$ telle que $f(f^{-1}(B)) \neq B$

Question bonus (1pt) : en termes clairs, que signifient les propositions P et Q de l'exercice 1 ? Sont-elles vraies ou fausses ?