Examen d'algebre I du 19/01/2011 : corrigé

Questions de cours

1) Dénombrables : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (voir cours)
Non dénombrables : $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (voir cours) et $\mathbb{C}$ (car contient $\mathbb{R}$ qui est non dénombrable)

2) Pour tout $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, il existe un unique couple $(q,r)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ tel que $\begin{cases} a = bq+r \\ 0\leq r<|b| \end{cases}$.

3) Oui : soient $n=2$, $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$. On a $A^2=0$ donc pour tout $k\geqslant 2$, $A^k=0=B^k$, mais $A\neq B$.

4) Posons $M=(m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. On a $Tr(M)=\sum_{i=1}^n m_{ii}$.

$$Tr(AB)=\sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}\right)=\sum_{q=1}^n\left(\sum_{p=1}^n a_{qp}b_{pq}\right)$$

et $Tr(BA)=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ki}\right)=\sum_{p=1}^n\left(\sum_{q=1}^n b_{pq}a_{qp}\right)$ or on peut intervertir les signes sommes car cela revient toujours à sommer sur tous les indices $(p,q)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}$.

Donc $Tr(BA)=\sum_{q=1}^n\left(\sum_{p=1}^n b_{pq}a_{qp}\right)=Tr(AB)$.

Exercice 1 :

1) B est diagonale. On a vu en cours que

$$Diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\times Diag(\mu_1,\dots,\mu_n)=Diag(\lambda_1\mu_1,\dots,\lambda_n\mu_n).$$

d'où, par une récurrence que j'omets, $(Diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n))^k = Diag(\lambda_1^k,\dots,\lambda_n^k)$. Donc en particulier :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2/5

Par ailleurs, $C^0 = I_3$, $C^1 = C$, $C^2 = 0$ et donc pour tout $n \geqslant 2$,

$C^n = 0$.

2) $A = B + C$. Or $BC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = CB$. On peut donc appliquer la formule du binôme. Donc :

$$A^{20} = (B+C)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} C^k B^{20-k} = \sum_{k=0}^{1} \binom{20}{k} C^k B^{20-k}$$

car $C^k = 0$ pour $k \geqslant 2$.

Donc $A^{20} = B^{20} + 20 \times C \times B^{19} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{19} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{20} & 0 \\ 60 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a plus généralement pour $n \geqslant 1$,

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 3n & 0 & 1 \end{pmatrix}$, formule à laquelle on peut aboutir aussi par récurrence.

3) C n'est pas inversible car C a une ligne de 0.

B est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (N.B : B diagonale avec termes diagonaux tous $\neq 0$)

A est inversible (matrice triangulaire avec termes diagonaux tous non nuls). Cherchons son inverse par la méthode du pivot :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3/5

Exercice 2 :

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré au plus $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

(On pouvait aussi donner une autre forme valide de la formule de Taylor, comme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.)

2) On a $X^9 - 2X^8 + X^5 - X^2 + 1 = X^3(X^6 - 2X^5 + X^2) + (-X^2+1)$ et $\deg(-X^2+1) < \deg X^3$. Donc le reste est $-X^2+1$.

3) Si $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ alors $a_0 P_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 = 0 \times P_0 + 0 \times P_1 + 0 \times P_2 = 0$. Réciproquement, posons $P = a_0 P_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2$. Supposons $P = 0$. On a $a_2 = 0$ car sinon $\deg P = 2$ car on aurait $\deg(a_0 P_0 + a_1 P_1) \leq 1$ et $\deg a_2 P_2 = \deg P_2 = 2$. Comme $a_2 = 0$, on a $P = a_0 P_0 + a_1 P_1$. Par le même raisonnement $a_1 = 0$ (sinon $\deg P = 1$) puis $a_0 = 0$ (sinon $\deg P = 0$, or on sait que $\deg P = -\infty$). Donc $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

<u>Remarque</u> : c'est dans le cours sous une forme plus générale.

4a) D'après la formule de Taylor, on a :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = \sum_{k=3}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k + \sum_{k=0}^{2} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k$$

$$= (X-1)^3 \left(\sum_{k=3}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^{k-3} \right) + \left(\underbrace{P(1) + P'(1)(X-1) + P''(1)\frac{(X-1)^2}{2!}}_{\text{degré } \cancel{2, < \deg (X-1)^3}} \right)$$

or $\deg\left(P(1) + P'(1)(X-1) + P''(1)\dfrac{(X-1)^2}{2}\right) \leq 2 < 3 = \deg (X-1)^3$

donc $R = P(1) + P'(1)(X-1) + P''(1)\dfrac{(X-1)^2}{2}$.

4b) Posons $a_0 = P(1)$, $a_1 = P'(1)$, $a_2 = P''(1)$, $P_0 = 1$, $P_1 = (X-1)$ et $P_2 = \dfrac{(X-1)^2}{2}$. D'après 4a) et 3), on a

$(X-1)^3 \mid P \iff R = 0 \iff a_0 = a_1 = a_2 = 0$ (car $\deg P_k = k$ pour tout $k \in \{0,1,2\}$).

Donc $(X-1)^3 \mid P \iff P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$.

4c). Posons $P = 2X^{10} - 9X^5 + 26X$. D'après 4b), le reste R dans la division de P par $(X-1)^3$ est :

$R = P(1) + P'(1)(X-1) + P''(1)\dfrac{(X-1)^2}{2}$.

Or $P(1) = 2 - 9 + 26 = 19$

$P' = 20X^9 - 45X^4 + 26$ d'où $P'(1) = 20 - 45 + 26 = 1$

et $P'' = 180X^8 - 180X^3$ d'où $P''(1) = 180 - 180 = 0$.

Donc $R = 19 + 1 \times (X-1) + 0 \times (X-1)^2 = X - 18$

<u>Exercice</u> 3 : 1) Résolvons $z^2 - 2iz + 3 = 0$. On a $\Delta = (-2i)^2 - 12 = -16 = (4i)^2$ donc les solutions sont $z_1 = \dfrac{2i + 4i}{2} = 3i$ et $z_2 = \dfrac{2i - 4i}{2} = -i$.

De plus, $z \in f^{-1}(\{i\}) \iff \begin{cases} z \in \mathbb{C}^* \\ f(z) = i \end{cases} \iff \begin{cases} z \neq 0 \\ \frac{1}{2}\left(z + \frac{3}{z}\right) = i \end{cases}$

$\iff \begin{cases} z \neq 0 \\ z^2 - 2iz + 3 = 0 \end{cases} \iff (z = 3i$ ou $z = -i)$ d'après le résultat précédent.

Donc $f^{-1}(\{-i\}) = \{3i, -i\}$

2) On a $f(-i) = f(3i) = i$ mais $-i \neq 3i$ donc f n'est pas injective. Montrons que f est surjective. Soit $z' \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}^*$. On a :

$$f(z) = z' \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(z + \frac{3}{z}\right) = z' \Leftrightarrow z^2 - 2z'z + 3 = 0.$$

Comme toute équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$, cette équation a au moins une solution dans $\mathbb{C}$, et comme 0 n'est pas solution, cette solution est dans $\mathbb{C}^*$. Donc il existe $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $f(z) = z'$ et f est surjective.

3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a $f(\sqrt{3}\, e^{i\theta}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\, e^{i\theta} + \frac{3}{\sqrt{3}\, e^{i\theta}}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\, e^{i\theta} + \sqrt{3}\, e^{-i\theta}\right) = \sqrt{3} \times \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \sqrt{3} \times \cos\theta.$$

Or $A = \{\sqrt{3}\, e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\}$. Donc $f(A) = \{\sqrt{3}\cos\theta,\ \theta \in \mathbb{R}\}$

$$= \{\sqrt{3} \times x,\ x \in [-1, 1]\} = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}].$$

En particulier $f(A) \subset \mathbb{R}$ et $f(A)$ n'est pas un cercle. Or A est un cercle. Donc l'image directe d'un cercle par f n'est pas toujours un cercle.

Question bonus : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n$. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et des matrices d'opération élémentaires $P_1, P_2, \ldots, P_k$ telles que : $\tilde{A} = P_k P_{k-1} \cdots P_1 A$ soit ~~inver~~ échelonnée-réduite. Comme A est inversible, on a forcément $\tilde{A} = I_n$ donc $(P_k P_{k-1} \cdots P_1) A = I_n$. Or comme toute matrice d'opération élémentaire, la matrice P_i est inversible et son inverse P_i^{-1} est une autre matrice d'opération élémentaire. Donc $A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_{k-1}^{-1} P_k^{-1}$ ~~est le produit~~ et A est le produit d'un nombre fini de matrices d'opérations élémentaires.

Remarque : réciproquement, tout produit de matrices d'opérations élémentaires est inversible comme produit de matrices inversibles.