UNIVERSITE PARIS-DAUPHINE DEMI2E 1ère année, 9 novembre 2010

Corrigé du partiel d'algèbre 1

Questions de Cours

1) Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E
   a) $\mathcal{R}$ est symétrique si pour tout x et y de E tels que $x\,\mathcal{R}\,y$ on a $y\,\mathcal{R}\,x$.

   b) $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique s'il existe un x et un y de E tels que $x\,\mathcal{R}\,y$ et *non* $(y\,\mathcal{R}\,x)$[1].

   c) $\mathcal{R}$ est antisymétrique si pour tout x et y de E tels que $x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,x$ on a $x=y$.

2) Soit $r=|z|$ et θ un argument de z. Les racines nièmes de z sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z')^n=z$, d'inconnue z'. Elles sont données par
$$w_k=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}},\quad k=0,\dots,n-1.$$
Leur somme S vaut donc:
$$S=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}\,S' \text{ avec } S'=\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\frac{2k\pi}{n}}.$$
Comme $n\geq 2$, on a $e^{i\frac{2\pi}{n}}\neq 1$. Donc
$$S'=\sum_{k=0}^{n-1}u_k=\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k=\frac{1-e^{i\frac{2n\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}}=\frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}}=0 \text{ car } e^{i2\pi}=1$$
donc $S=0$.

3) 1 est le complexe de module 1 et d'argument $0[2\pi]$. D'après la formule rappelée à la question précédente, ses racines cubiques sont 1, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Comme -1 est le complexe de module 1 et d'argument π, ses racines cubiques sont $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\pi}=-1$ et $e^{i\frac{5\pi}{3}}$. Enfin $-8i$ est le complexe de module 8 et d'argument $-\frac{\pi}{2}$. Ses racines cubiques sont donc $2\,e^{-i\frac{\pi}{6}}, 2\,e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $2\,e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

4) Un ensemble E est dénombrable s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ n'est certainement pas dénombrable car s'il l'était, $\mathbb{R}$ serait dénombrable comme la réunion disjointe d'ensembles dénombrables, à savoir $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

5) Si on dispose de deux propriétés P et Q tels que $P\Rightarrow Q$, alors la négation de $(P\Rightarrow Q)$ est (P et *non* Q). La négation de la propriété donnée est
$$\exists\, f\in F,\quad [\exists x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R}, f(x,y)\geq 0]\quad \text{ET}\quad [\exists\, y\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}, f(x,y)<0]\,.$$
La proposition P est VRAIE, en effet s'il existe un réel x_0 pour lequel $f(x_0,y)\geq 0$ pour tout tout réel y , alors forcement pour tout réel y, on a toujours $f(x_0,y)\geq 0$ et donc il existe bel et bien un réel x tel que $f(x,y)\geq 0$.

6) Une rotation de centre C d'affixe z_C et d'angle θ associe à tout point d'affixe $z\in\mathbb{C}$ le point M' d'affixe $z'=e^{i\theta}(z-z_C)+z_C$. La rotation de centre le point d'affixe $1+i$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ est donc l'application qui à tout $z\in\mathbb{C}$ associe le complexe $z'=e^{-i\frac{\pi}{4}}(z-1-i)+1+i=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\,z-\sqrt{2}+1+i$

[1] Et oui, il fallait juste nier la réponse à la question a) !!

Exercice I

a) On écrit d'une part que $1 + e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = 2\ e^{i\frac{\pi}{12}}\ \cos\frac{\pi}{12}$. On a donc $|1 + e^{i\frac{\pi}{6}}| = |2\ e^{i\frac{\pi}{12}}\ \cos\frac{\pi}{12}| = 2\ \cos\frac{\pi}{12}$ car $\cos\frac{\pi}{12} \geq 0$. Pour déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$, il suffit de calculer le module de $1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ et le diviser par 2. On obtient $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. On pouvait aussi calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ en remarquant que $\cos\frac{\pi}{12}$ est la partie réelle de $(1 + e^{i\frac{\pi}{6}})/|1 + e^{i\frac{\pi}{6}}|$.

b) On pose $z = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}$. Il est évident que d'une part on a $|z| = \frac{|e^{i\frac{\pi}{3}}|}{|e^{i\frac{\pi}{4}}|} = \frac{1}{1} = 1$ et que $\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}\ e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$, donc $z = e^{i\frac{\pi}{12}}$. D'autre part,

$$z = \frac{\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})}{\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)\right).$$

On a donc $\sin\frac{\pi}{12} = \Im(z) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (on a aussi $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$: les deux expressions sont égales). Comme $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout réel x, il vient que $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Exercice II

La première observation est que $z = 0$ est évidemment une solution de l'équation qui nous intéresse. Supposons que $z \neq 0$ et $z^n = \bar{z}$. On a alors $z^{n+1} = z\bar{z} = |z|^2$ donc $|z|^{n+1} = |z^{n+1}| = |z|^2$. Comme $z \neq 0$, ceci implique que $|z|^{n-1} = 1$, et donc $|z| = 1$ car $n \geq 2$. Comme $z^{n+1} = |z|^2$, on a donc $z^{n+1} = 1$, donc z est une racine $(n+1)$ième de 1. Réciproquement, si $z^{n+1} = 1$ alors $|z| = 1$, donc $z^{n+1} = |z|^2 = z\bar{z}$ et donc en divisant par z (qui est différent de 0 car $|z| = 1$) on obtient $z^n = \bar{z}$. Les solutions sont donc 0 et les racines $(n+1)$ème de 1, c'est à dire les nombres de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}, \quad k = 0, \ldots, n$.

Exercice III

a) Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec x et y réel. Le fait que z soit réel veut dire que $y = 0$ et donc que $f(z) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ et donc, en utilisant la formule d'Euler, $f(z) = \cos(x) = \cos(z)$. On en déduit que pour tout réel x, $f(x) = f(x + 2\pi)$ puisque la fonction cosinus est périodique de période 2π donc f n'est pas injective. De plus on sait que $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. On en déduit que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$

b) $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C}, \quad f(z) \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \overline{f(z)}\}$. Or en posant $z = x + iy$ avec x et y réels :

$$f(z) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix} = e^{-y}e^{-ix} + e^{y}e^{ix} \Leftrightarrow (e^{y} - e^{-y})(e^{-ix} - e^{ix}) = 0 \Leftrightarrow 2\,i\,(e^{y} - e^{-y})\,\sin x = 0$$

Il vient donc que $f(z)$ est réel si et seulement si ($e^{y} - e^{-y} = 0$ OU $\sin x = 0$) ce qui est équivalent à ($y = 0$ OU $\exists k \in Z, x = k\pi$). On a donc :

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{k\pi + iy, k \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Problème

1) Une transposition permute par définition seulement deux éléments et laisse le reste des éléments inchangés. Il y a donc $n - 2$ éléments de E qui restent inchangés par τ. D'où $Card\,PF(\tau) = n - 2$. Puisque l'application τ échange seulement deux éléments, $\tau \circ \tau$ les "remet en place" et donc intuitivement $\tau \circ \tau = Id_E$. Formellement, supposons que τ échange x et y, alors pour tout autre élément z de E on a $\tau(z) = z$ et donc $\tau(\tau(z)) = \tau(z) = z$. De plus, $\tau(x) = y$ et donc $\tau(\tau(x)) = \tau(y) = x$ et de même pour y. Donc $\tau \circ \tau = Id_E$. Donc τ est bijective de réciproque elle-même.

2) D'après la question précédente, toute transposition est une bijection, d'où toute composée d'un nombre fini de transpositions est aussi une bijection d'où f est bijective.

3) E a au moins deux éléments distincts, disons x et y. On peut donc considérer la transposition τ qui échange x et y. D'après la question a), on a $\tau \circ \tau = Id_E$, ce qui prouve que l'application identité de E s'écrit sous forme la forme d'une composée d'un nombre fini de transpositions (deux en l'occurence).

4) a) L'application g est clairement bien définie de E dans E. Une transposition est une bijection et l'application f est bijective par définition. Comme la composée de deux bijections est une bijection on en déduit que g est bijective.

b) Par définition $f(x_0) \neq x_0$ et donc $x_0 \notin PF(f)$. De plus comme f est bijective, en particulier injective et que $f(x_0) \neq x_0$, on en déduit que $f(f(x_0)) \neq f(x_0)$ ce qui veut dire que $f(x_0) \notin PF(f)$. Soit $x \in PF(f)$. On a donc $f(x) = x$. De plus, d'après ce qui précède, $x \in E \backslash \{x_0, f(x_0)\}$, donc $\tau(x) = x$. Donc finalement $g(x) = \tau(f(x)) = \tau(x) = x$. Donc $x \in PF(g)$, et donc $PF(f) \subset PF(g)$.

c) On a $\tau(f(x_0)) = x_0$ par définition, donc $x_0 \in PF(g)$, or $x_0 \notin PF(f)$ par définition, donc $PF(f) \neq PF(g)$. Comme $PF(f) \subset PF(g)$, l'ensemble $PF(f)$ est un sous-ensemble strict de $PF(g)$. De plus, comme E est de cardinal fini, $PF(g)$ l'est aussi car c'est un sous-ensemble de E. Or on sait que si A est un sous-ensemble strict d'un ensemble fini B, alors $Card\ A < Card\ B$. Donc $Card\, PF(f) < Card\, PF(g)$.

d) On fait une récurrence forte sur le nombre de points fixes (plus prÈcisÈment, soit une récurrence descendante sur le nombre de points fixes, soit une récurrence montante sur le nombre de points non fixes). Pour tout entier naturel k, notons H_k la propriété suivante : toute bijection $f : E \to E$ qui a $n - k$ points fixes (i.e. $Card\, PF(f) \geq n - k$) peut s'écrire comme la composée d'un nombre fini de transpositions.
Initialisation : H_0 dit que toute bijection de E dans E qui a n points fixes est la composée d'un nombre fini de transpositions. Mais comme E a n éléments, la seule bijection de E dans E qui a n points fixes est l'identité de E. Donc d'après la question 3, (H_0) est vraie.
Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons H_q vraie pour tout entier naturel $q \leq k$. Soit $f : E \to E$ une bijection qui a $n - (k + 1)$ points fixes. D'après la question précédente, il existe une transposition τ et une bijection $g : E \to E$ qui a strictement plus de points fixes que f telle que $g = \tau \circ f$. Tout d'abord, $f = \tau \circ \tau \circ f = \tau \circ g$. De plus, comme g a strictement plus de points fixes que f, par hypothèse de récurrence (forte), g est la composée d'un nombre fini de transpositions, et donc f aussi, puisque $f = \tau \circ g$. Donc H_{k+1} est vraie.
Donc H_k est vraie pour tout entier naturel k. Or toute bijection de E dans E a un nombre de points fixes de la forme $n - k$ (prendre $k = n - Card\, PF(n)$), donc toute bijection de E dans E est la composée d'un nombre fini de transpositions (en fait, d'au plus n transpositions).

e) Soit $f : E \to E$, une application injective. Comme E est fini, f est aussi bijective, donc d'après la question 4.d) elle peut s'écrire comme la composée d'un nombre fini de transpositions. Considérons maintenant une application de E dans E qui n'est pas bijective (il en existe car E ayant au moins deux éléments, toute application constante de E dans E n'est pas surjective, donc pas bijective). Cette application ne peut pas s'écrire comme la composée d'un nombre fini de transpositions car sinon elle serait bijective d'après la question 2). Il existe donc des applications de E dans E qui ne sont pas la composée d'un nombre fini de transpositions. Plus précisément, seules les applications bijectives sont de cette forme.