

Chapitre 5 : Relations

Le but de ce chapitre est d'étudier deux manières de structurer un ensemble : a) classer les éléments de l'ensemble en différentes catégories (comme "hommes" et "femmes", pour un ensemble de personnes) ; b) ordonner les éléments de cet ensemble du plus petit au plus grand, suivant un certain critère. Le lecteur que l'abstraction ne gêne pas peut sauter les introductions et commencer directement par la section 4.

1 Introduction aux relations d'équivalence : classer les éléments d'un ensemble suivant leur types

Pour affiner la présentation des résultats d'un sondage, on divise souvent l'ensemble des personnes interrogées en "sympathisants de gauche", "sympathisants de droite", et "ni l'un ni l'autre". Ou bien entre "hommes" et "femmes". Ou encore en classes d'âges, par exemple : "les moins de 18 ans", "les 18-25ans", "les 26-34 ans", "les 35-50 ans" et "les plus de 50 ans".

En mathématiques, il est également courant de diviser un ensemble en sous-ensembles disjoints (ce qu'on appelle "partitionner un ensemble"). Par exemple, on peut diviser l'ensemble des entiers relatifs en "nombres pairs" et "nombres impairs". Ou bien en "nombres strictement négatifs", "0" et "nombres strictement positifs". De telles partitions sont notamment utiles pour faire des preuves cas par cas. Ainsi, si l'on veut prouver que pour tout entier naturel n , l'entier $n^3 - n$ est divisible par 3, il peut être utile de diviser les entiers naturels en "nombres de la forme $3k$ ", "nombres de la forme $3k + 1$ " et "nombres de la forme $3k + 2$ ".

Définir une relation d'équivalence, c'est précisément définir un critère qui permet de découper un ensemble en sous-ensembles disjoints, chacun de ces sous-ensembles regroupant les éléments d'un certain type. Ces sous-ensembles sont appelés des "classes d'équivalence", par référence aux classes d'âge.

On demandera que le critère définissant la notion "d'être du même type" vérifie les propriétés suivantes. Pour tous éléments a , b et c de l'ensemble :

- i) a est du même type que a ;
- ii) si a est du même type que b , et que b est du même type que c , alors a est du même type que c
- iii) si a est du même type que b alors b est du même type que a (et l'on dira simplement : a et b sont du même type)

Avant de donner des définitions précises, voici quelques exemples.

1.1 Exemples de relations d'équivalence

Sur un ensemble de personnes :

- 1) "avoir le même sexe". Il y a deux "classes d'équivalence" : la "classe des hommes" et la "classe des femmes".
- 2) "être né la même année". Les classes d'équivalence sont : ..., "les gens nés en 1985", "les gens nés en 1986", "les gens nés en 1987",...
- 3) "avoir un prénom commençant par la même lettre" : les classes d'équivalence sont "les personnes dont le prénom commence par a", "les personnes dont le prénom commence par b", etc.

Sur l'ensemble des entiers relatifs

- 4) "avoir la même parité" : les classes d'équivalence sont "les nombres pairs" et "les nombres impairs".
- 5) "avoir le même carré" : les classes d'équivalence sont $\{0\}$, $\{-1; 1\}$, $\{-2; 2\}$, $\{-3; 3\}$, $\{-4; 4\}$, ... Dans cet exemple, il y a une infinité de classes d'équivalence.
- 6) "avoir le même reste dans la division euclidienne par 3". Il y a trois classes d'équivalence : les nombres de la forme $3k$, les nombres de la forme $3k + 1$ et les nombres de la forme $3k + 2$.

Sur l'ensemble des réels :

- 7) "être égaux modulo 2π " : il y a une infinité non dénombrable de classes d'équivalence. Pour tout réel x , la classe de x est $\{x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

8) "être strictement du même signe" (plus précisément : "être égal à ou strictement du même signe que", c'est à dire $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x = y$ ou $xy > 0$). Il y a trois classes d'équivalence : $\mathbb{R}_-^*$, $\{0\}$ et $\mathbb{R}_+^*$.

Sur l'ensemble des parties finies non vides de $\mathbb{N}$:

9) "avoir le même nombre d'éléments". Il y a une infinité de classes d'équivalence : l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ ayant un élément, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ ayant deux éléments, etc.

A ce stade ce polycopié se transforme en "poly dont vous êtes le héros". Si vous voulez voir tout de suite le cours sur les relations d'équivalence, rendez-vous à la section 4. Si vous voulez d'abord voir des exemples de relation d'ordre, rendez-vous à la section 2.

2 Introduction aux relations d'ordre : ordonner les éléments d'un ensemble

Définir un ordre sur un ensemble, c'est se donner un critère selon lequel certains éléments seront considérés plus petits que d'autres et qui vérifie les trois propriétés suivantes.

- i) Tout élément de l'ensemble est plus petit que lui-même.
 - ii) Si a est plus petit que b , et que b est plus petit que c , alors a est plus petit que c ,
 - iii) Si a est plus petit que b , et que b est plus petit que a , alors $a = b$
- (a, b, c sont des éléments génériques de l'ensemble)

La première propriété indique que plus petit est à prendre au sens de "plus petit ou égal" (on dira que a est strictement plus petit que b si a est plus petit que b et $a \neq b$). La deuxième propriété assure que le classement "du plus petit au plus grand" induit par notre critère est cohérent. La troisième signifie qu'on n'accepte pas les ex-aequo. Quand on acceptera les ex-aequo, on ne parlera pas d'ordre mais de préordre.

Le fait de définir un ordre sur un ensemble permettra de définir des notions comme celle de plus grand ou de plus petit élément de cet ensemble, et de raisonner à partir de ces notions. Cela nous donnera donc de nouvelles armes. Avant de donner des définitions précises, examinons quelques exemples.

1) L'ordre usuel sur les entiers naturels, noté $\leq$: on a $0 \leq 1 \leq 2$, etc. Cet ordre se prolonge en l'ordre usuel sur les réels, toujours noté $\leq$.

2) L'ordre de l'alphabet : a vient avant b , qui vient avant c , etc. En mathématiques, on aime bien désigner un ordre grâce à un symbole ressemblant à $\leq$. Si l'on choisit, par exemple, le symbole courbé $\preceq$, on écrira $a \preceq b$ pour dire " a vient avant b ".

3) L'ordre lexicographique (ordre des mots du dictionnaire) : pour classer les mots dans le dictionnaire, on compare les mots deux à deux en comparant d'abord les premières lettres, puis les deuxièmes lettres si les premières sont identiques, etc. En notant $\preceq_1$ l'ordre obtenu, on a par exemple : crabe $\preceq_1$ étoile $\preceq_1$ le $\preceq_1$ les $\preceq_1$ perles, etc.¹

Remarque : si l'on veut ordonner des données dans un tableur, comme Excel, on utilise souvent un critère de type lexicographique. On trie d'abord suivant une certaine colonne, puis suivant une autre, etc.

¹Plus précisément, pour classer les mots dans le dictionnaire, on applique les règles suivantes :

a) mots de même longueur (même nombre de lettres) : on compare les premières lettres. Si la première lettre d'un des mots vient strictement avant la première lettre de l'autre dans l'ordre de l'alphabet, ce mot est classé strictement avant l'autre. Si les deux mots ont la même première lettre, on compare les deuxièmes lettres : si la deuxième lettre d'un des mots vient strictement avant la première lettre de l'autre, ce mot est classé strictement avant l'autre. Si les deux mots ont aussi la même deuxième lettre, on compare les troisièmes lettres, etc. Comme on a supposé qu'on comparait des mots ayant le même nombre de lettres, soit on parvient à classer un mot strictement avant l'autre, soit les deux mots sont identiques, et donc classés au même endroit.

b) mots de longueurs différentes : on applique la même règle, en précisant que si à la fin du mot le plus court, on n'est pas parvenu à départager les deux mots, le mot le plus court est classé strictement avant l'autre (cela revient à compléter mentalement le mot le plus court en ajoutant à la fin une lettre imaginaire venant avant toutes les autres, autant de fois que nécessaire pour que les deux mots aient la même longueur, puis à utiliser la règle du a)).

4) **Un préordre** : imaginons qu'on dise qu'un mot est plus petit qu'un autre s'il a moins ou autant de lettres. En ce sens, "le" est plus petit que "les" qui est plus petit que "crabe", etc. Ce critère vérifie les propriétés i) et ii) mais pas la propriété iii) car tous les mots qui ont le même nombre de lettres sont "ex-aequos". Par exemple, "crabe" est plus petit que "perle" et "perle" est plus petit que "crabe", mais les mots "crabe" et "perle" sont différents ! On dit que ce critère définit un préordre, mais pas un ordre.²

5) **Les relations de préférences : des préordres fondamentaux en micro-économie**. En micro-économie, on s'interroge sur les préférences des agents. Imaginons par exemple un agent qui, toutes choses égales par ailleurs, doit arbitrer entre avoir un salaire élevé et avoir beaucoup de temps libre. Supposons qu'il préfère avoir x heures de temps libre par jour et gagner y euros à avoir x' heures de temps libre et gagner y' euros si et seulement si $xy \geq x'y'$. Cela permet de classer les couples (temps libre, salaire) de ceux qu'il aime le moins à ceux qu'il préfère. Mais ce critère admet des indifférences : l'agent est indifférent entre avoir 4h de temps libre et gagner 3000 euros, et avoir 3h de temps libre et gagner 4000 euros. Il s'agit donc d'un préordre, et non d'un ordre.³

6) **Un ordre partiel : l'ordre de la généalogie**. Considérons l'ensemble des êtres humains nés depuis une certaine date. On peut les ordonner suivant leurs dates de naissance (ce sera un ordre si l'on est tellement précis sur le moment de la naissance que deux personnes ne seront jamais "nées en même temps", et un préordre sinon). Toutefois, pour certaines applications, il peut être plus intéressant de les ordonner suivant ce qu'on pourrait appeler "l'ordre de la généalogie". C'est à dire : l'humain x vient avant l'humain y (" x est plus petit que y ") si x est un ancêtre de y . Plus précisément, puisqu'on veut définir une notion de "plus petit ou égal" : x est plus petit que y si $x = y$ ou x est un ancêtre de y .

Ce critère vérifie les propriétés i), ii) et iii), c'est donc un ordre. De plus, c'est un ordre utile, qui permet de structurer l'ensemble en établissant des filiations. Mais il ne permet pas de comparer n'importe quels être humains. Par exemple, si x et y sont deux soeurs, x n'est pas un ancêtre de y et y n'est pas un ancêtre de x . Le critère de filiation ne permet pas de classer les humains "du plus petit au plus grand", il permet seulement de dire que certains viennent avant d'autres. On dit qu'il s'agit d'un ordre partiel. Par opposition, un ordre est dit total si deux éléments de l'ensemble sont toujours comparables. Par exemple, l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$ est un ordre total.

Remarque : l'ordre de la généalogie est très naturel dès qu'on a une structure arborescente (comme sur un ordinateur où l'on a un dossier racine, qui contient des grands dossiers, qui contiennent des sous-dossiers, etc).

Si vous brûlez d'en découdre avec la théorie, regardez juste les exemples 10a) et 10b) de la section 3, puis rendez-vous à la section 4. Si vous avez envie d'autres exemples, rendez-vous à la section 3.

3 Caroline à la mer

7) **Un autre ordre lexicographique** : on pourrait imaginer un autre ordre pour les lettres de l'alphabet, par exemple le même ordre que l'ordre habituel, sauf qu'on met toutes les voyelles en premier : a, e, i, o, u, y, b, c, d, f, g, etc. Notons $\preceq_2$ l'ordre lexicographique associé à cet ordre de l'alphabet. Suivant cet ordre, "étoile" vient avant "crabe", ce qu'on noterait : étoile $\preceq_2$ crabe. Cet ordre serait tout à fait raisonnable. D'ailleurs, dans certains alphabets, comme l'alphabet hindi (devanagari pour être précis), les voyelles viennent avant les consonnes.

²Pour retenir ce vocabulaire, dites-vous qu'un préordre est comme un ordre pas terminé : on a fait le gros du travail, mais il reste à départager les ex-aequos.

³Bien sûr, en réalité, l'agent ne tient pas compte que de son temps libre et de son salaire, par exemple, l'intérêt qu'il trouve à son travail est sûrement essentiel. Les préférences de l'agent sont ici modélisées de manière simplissime ; cela n'empêche pas qu'il puisse y avoir un arbitrage entre temps libre et salaire. Par ailleurs, si les préférences de l'agent vous paraissent bizarres, notez qu'on pourrait prendre une autre unité de temps que l'heure ; les préférences vous paraîtraient peut-être alors plus réalistes.

8) Un dictionnaire bien étrange. Pour ordonner les mots, on pourrait aussi appliquer la règle suivante : les mots de une lettre viennent avant les mots de deux lettres qui viennent avant les mots de trois lettres, etc. De plus, pour classer les mots de même longueur, on utilise la règle habituelle (l'ordre lexicographique usuel). Notons $\preceq_3$ l'ordre ainsi obtenu. Suivant cet ordre, "pour" vient avant "coquillages" : pour $\preceq_3$ coquillages. Pour ordonner les mots du dictionnaire, cet ordre a un défaut important : les mots de la même famille, par exemple "chant" et "chanteur", ne sont pas du tout classés au même endroit.

Exercice 1 *Considérons la phrase suivante, issu du livre de Pierre Probst Caroline à la mer :*

"Le fidèle Youpi cherche toujours pour Caroline les plus jolis coquillages".

Ordonner les mots de cette phrase suivant les ordres $\preceq_1$, $\preceq_2$ et $\preceq_3$ définis aux paragraphes 3), 7) et 8).

Réponses dans la note de bas de page.⁴

9) L'ordre de la numération arabe (numération de position). Nous utilisons la numération arabe (qui est en fait d'origine indienne). Dans ce système d'écriture des nombres entiers, on dispose de chiffres : 0, 1, 2, ..., 9, qui sont l'équivalent des lettres d'un alphabet. En assemblant des chiffres, on forme un nombre (comme en assemblant des lettres, on forme un mot). Les assemblages autorisés sont, en plus du 0, tous ceux qui comportent un nombre fini de chiffres et ne commencent pas par 0. On dispose d'un ordre sur les chiffres : $0 \leq 1 \leq \dots \leq 9$. A l'aide de cet ordre sur les chiffres, on ordonne les nombres arabes ainsi : les nombres de un chiffre viennent avant les nombres de deux chiffres, qui viennent avant les nombres de trois chiffres, etc. De plus, pour classer les nombres ayant autant de chiffres, on utilise l'ordre lexicographique (avec les chiffres comme alphabet) : on compare les premiers chiffres, s'ils sont égaux on compare les deuxièmes chiffres, etc. C'est exactement l'équivalent pour les nombres de l'ordre sur les mots vu dans l'exemple 8). Cette manière d'ordonner un ensemble, bien étrange pour les mots du dictionnaire, nous est très familière dans un autre contexte.

10) Ordonner les éléments de $\mathbb{R}^n$.

Il y a plusieurs manières d'ordonner, par exemple, les éléments de $\mathbb{R}^2$, c'est à dire l'ensemble des couples (x_1, x_2) où x_1 et x_2 sont des réels. Les ordres les plus communs sont l'ordre lexicographique et l'ordre produit.

10a) L'ordre lexicographique. Notons $\preceq_L$ l'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$. Il est défini ainsi : si (x_1, x_2) et (x'_1, x'_2) sont deux couples de réels, $(x_1, x_2) \preceq_L (x'_1, x'_2)$ si $x_1 < x'_1$ ou $(x_1 = x'_1$ et $x_2 \leq x'_2)$. Si l'on voulait comparer suivant la même méthode des éléments de $\mathbb{R}^3$, la règle serait la suivante : $(x_1, x_2, x_3) \preceq_L (x'_1, x'_2, x'_3)$ si $x_1 < x'_1$ ou $(x_1 = x'_1$ et $x_2 < x'_2)$ ou $(x_1 = x'_1$ et $x_2 = x'_2$ et $x_3 \leq x'_3)$.

L'ordre lexicographique correspond à celui du dictionnaire, à la traduction suivante près : les réels correspondent aux lettres, l'ordre usuel sur les réels correspond à l'ordre des lettres de l'alphabet, et un élément de $\mathbb{R}^n$ correspond à un mot de n lettres. Ceci vu, on procède comme pour classer les mots dans le dictionnaire : on compare les premiers "caractères", puis, s'ils sont les mêmes, on compare les deuxièmes, etc.

Exercice 2 *Ordonner selon l'ordre lexicographique les couples (11, 8), (12, 14), (15, 9) et (11, 6). Réponse en note.⁵*

10b) L'ordre produit. Notons $\preceq_P$ l'ordre produit sur $\mathbb{R}^2$. Il est défini ainsi : $(x_1, x_2) \preceq_P (x'_1, x'_2)$ si $x_1 \leq x'_1$ et $x_2 \leq x'_2$ (autrement dit, un couple est plus petit qu'un autre s'il est plus petit coordonnée par coordonnée). Selon l'ordre produit, $(11, 6) \preceq_P (11, 8) \preceq_P (12, 14)$ et de plus $(11, 8) \preceq_P (15, 9)$. En revanche, on n'a ni $(12, 14) \preceq_P (15, 9)$ ni $(15, 9) \preceq_L (12, 14)$. Il existe donc des couples que l'ordre produit ne permet pas de comparer (aucun n'est "plus petit" que l'autre). On dit que l'ordre produit est un ordre *partiel*.

L'ordre produit est naturel, par exemple, pour comparer des résultats scolaires quand on ne connaît pas l'importance relative des matières. Supposons que quatre étudiants, Athos, Porthos, Aramis et d'Artagnan, passent un concours qui comprend deux épreuves : une de philosophie et une d'histoire. Athos obtient 11 en philosophie et 6 en histoire, ce qu'on note (11, 6). Porthos obtient (11, 8), Aramis (15, 9) et d'Artagnan

⁴Ordre 1 : Caroline $\preceq_1$ cherche $\preceq_1$ coquillages $\preceq_1$ fidèle $\preceq_1$ jolis $\preceq_1$ le $\preceq_1$ les $\preceq_1$ plus $\preceq_1$ pour $\preceq_1$ toujours $\preceq_1$ Youpi.
Ordre 2 : Youpi $\preceq_2$ Caroline $\preceq_2$ coquillages $\preceq_2$ cherche $\preceq_2$ fidèle $\preceq_2$ jolis $\preceq_2$ le $\preceq_2$ les $\preceq_2$ pour $\preceq_2$ plus $\preceq_2$ toujours
Ordre 3 : le $\preceq_3$ les $\preceq_3$ plus $\preceq_3$ pour $\preceq_3$ jolis $\preceq_3$ Youpi $\preceq_3$ fidèle $\preceq_3$ cherche $\preceq_3$ Caroline $\preceq_3$ toujours $\preceq_3$ coquillages.

⁵(11, 6) $\preceq_L$ (11, 8) $\preceq_L$ (12, 14) $\preceq_L$ (15, 9)

(12, 14). Sans connaître l'importance relative de la philosophie et de l'histoire (tant que chaque matière a une importance non nulle), on peut être sûr que les résultats d'Aramis et de d'Artagnan sont meilleurs que ceux de Porthos, qui sont eux-mêmes meilleurs que ceux d'Athos. En revanche, on ne peut pas dire si les résultats d'Aramis sont meilleurs ou moins bons que ceux de d'Artagnan.

4 Cours

Pour les preuves des résultats de cette section, se référer au cours d'amphi.

4.1 Relations binaires

Une relation binaire $\mathcal{R}$ est définie par un ensemble E et par une partie G de $E \times E$. On dit alors que $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E . On dit que x est en relation avec y et on note $x \mathcal{R} y$ si et seulement si $(x, y) \in G$.

En pratique, une relation est en général définie par une propriété commune aux couples (x, y) , par exemple la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y = 1$.

Nous nous intéresserons uniquement à deux types de relations : les relations d'ordre et les relations d'équivalence.

4.2 Relations d'équivalence

Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation d'équivalence si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- réflexivité : pour tout x de E , $x \mathcal{R} x$; on dit que $\mathcal{R}$ est réflexive ;
- symétrie : pour tous x et y de E , si $x \mathcal{R} y$ alors $y \mathcal{R} x$; on dit que $\mathcal{R}$ est symétrique ;
- transitivité : pour tous x, y et z de E , si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$, alors $x \mathcal{R} z$; on dit que $\mathcal{R}$ est transitive.

Interprétation : la définition des relations d'équivalence cherche à formaliser la notion de : "être du même type (suivant un critère donné)". Ceci compris, on demande la réflexivité parce qu'on veut que tout élément x de l'ensemble soit du même type que lui-même. On demande la transitivité pour avoir que si x est du même type que y et que y est du même type que z , alors x est du même type que z . Enfin, on demande la symétrie pour avoir que si x est du même type que y alors y est du même type que x .

Une relation d'équivalence permet de regrouper les éléments d'un ensemble en classes d'équivalence ; la classe de l'élément a , notée $cl(a)$ ou $\bar{a}$, est l'ensemble de tous les éléments x tels que $x \mathcal{R} a$; ces éléments sont dits équivalents à a .

4.2.1 Partition d'un ensemble en classes d'équivalence

Lorsque $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur un ensemble E , l'ensemble des classes d'équivalences est appelé ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$, et noté $E/\mathcal{R}$.

L'ensemble $E/\mathcal{R}$ possède trois propriétés remarquables :

- aucune classe d'équivalence n'est vide,
- deux classes distinctes sont disjointes,
- l'union de toutes les classes d'équivalence est l'ensemble E .

Les classes d'équivalence forment donc une partition de E .

4.2.2 Exemples de relations d'équivalence

- 1) Les exemples donnés dans l'introduction (section 1)
- 2) Sur n'importe quel ensemble, la relation d'égalité.
- 3) Sur un ensemble de propositions, la relation d'équivalence logique (c'est à dire : une proposition P est en relation avec une proposition Q si et seulement si $P \Leftrightarrow Q$).
- 4) Sur $\mathbb{Z}$, la relation de congruence modulo n : si p, q et n sont des entiers relatifs, on dit que p est congru à q modulo n si $p - q$ est un multiple de n . C'est une relation d'équivalence.

5) Un exemple très général : soit E et F des ensembles, et $f : E \rightarrow F$ une application. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur E définie par, pour tous x et y dans E , $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$. C'est une relation d'équivalence.

Remarque : beaucoup de relations d'équivalence peuvent s'écrire sous la forme du 5), même si cela n'est pas forcément apparent au début. La relation d'équivalence du 3) peut être mise sous cette forme en considérant l'application qui associe à une proposition sa valeur de vérité (vrai ou faux). La relation de congruence modulo n ne semble pas être de cette forme, mais en fait, on peut montrer que deux entiers sont congrus modulo n si et seulement s'ils ont le même reste dans la division euclidienne par n . En considérant l'application qui à un entier associe son reste dans la division euclidienne par n , on peut donc voir la relation de congruence modulo n comme un cas particulier du 5).

4.3 Relations d'ordre et de préordre

4.3.1 Définition

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E . La relation $\mathcal{R}$ est dite antisymétrique si pour tous x et y de E :

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \text{ entraîne } x = y.$$

La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si elle est réflexive, transitive et antisymétrique. On dit alors que $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble ordonné. La relation $\mathcal{R}$ est une relation de préordre si elle est réflexive et transitive.

Lorsqu'on sait qu'une relation est une relation d'ordre, on la note souvent $\preceq$ plutôt que $\mathcal{R}$, et $x \preceq y$ se lit " x est plus petit que y " ou " y est plus grand que x ". On dit que " x est strictement plus petit que y ", et l'on note $x \prec y$, si $x \preceq y$ et $x \neq y$.

Interprétation : on exige la réflexivité parce que, par convention, une relation d'ordre définit un ordre du type "inférieur ou égal" et non "inférieur strict". On exige la transitivité pour avoir la propriété naturelle : "si x est plus petit que y et que y est plus petit que z , alors x est plus petit que z ". On exige l'antisymétrie pour exclure les ex-aequo. Quand on admet les ex-aequo, on ne parle pas d'ordre, mais de préordre.

4.3.2 Exemples de relations d'ordre

1) les exemples des sections 2 et 3, dont il faut retenir essentiellement l'ordre lexicographique et l'ordre produit (exemples 10a) et 10b)).

2) l'inclusion entre parties d'un ensemble. C'est à dire, si E est un ensemble, la relation définie sur les parties de E par, pour toutes parties A et B de E , $A\mathcal{R}B$ si et seulement si $A \subset B$.

3) L'ordre de la divisibilité sur $\mathbb{N}$. C'est à dire, la relation définie sur $\mathbb{N}$ par, pour tous entiers n et p , $n\mathcal{R}p$ si et seulement si p est un multiple de n .

4.3.3 Ordre total, ordre partiel

Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur un ensemble E . L'ordre est total si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables :

$$\forall (x, y) \in E \times E, x \preceq y \text{ ou } y \preceq x$$

Dans le cas contraire, l'ordre est dit partiel.

L'ordre usuel sur $\mathbb{R}$ et l'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$ sont des ordres totaux. L'ordre produit sur $\mathbb{R}^2$ est un ordre partiel (en effet, pour cet ordre, $(0, 1)$ et $(1, 0)$ ne sont pas comparables). De même, si un ensemble E a au moins 2 éléments, la relation d'inclusion sur les parties de E est un ordre partiel (par exemple, dans le cas $E = \mathbb{N}$, on n'a ni $\{0, 1\} \subset \{2, 3\}$, ni $\{2, 3\} \subset \{0, 1\}$).

Attention : si $\preceq$ est un ordre partiel, ce n'est pas parce qu'on n'a pas $x \preceq y$ qu'on a $y \preceq x$: il se peut que x et y ne soient pas comparables.

4.3.4 Majorant, plus grand élément, borne supérieure, etc.

Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur un ensemble E , Soit A une partie de E , et x et y des éléments de E .

Majorant, minorant

$x \in E$ est un majorant de A si pour tout $a \in A$, $a \preceq x$.

$y \in E$ est un minorant de A si pour tout $a \in A$, $y \preceq a$.

Une partie A de E est majorée lorsqu'elle admet un majorant, minorée lorsqu'elle admet un minorant. A est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Plus grand élément, plus petit élément

Il existe au plus un élément de A qui soit un majorant de A . Si un tel élément existe, on l'appelle le plus grand élément, ou le maximum, de A ; on se note : $\max A$ ou $pge(A)$.

De même, il existe au plus un élément de A qui minore A , et s'il existe, on l'appelle le plus petit élément, ou le minimum, de A ; on le note : $\min A$ ou $ppe(A)$.

Borne supérieure, borne inférieure

On remarque que si M est un majorant d'une partie A , tout élément plus grand que M est également un majorant de A . Si l'ensemble des majorants de A possède un plus petit élément, c'est le plus petit majorant de A . Cet élément, lorsqu'il existe, s'appelle la borne supérieure de A et se note : $\sup A$.

On retient : la borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A .

On définit de même la borne inférieure de A , notée $\inf A$, comme étant le plus grand des minorants de A .

Pour toute partie A d'un ensemble ordonné,

si A a un maximum, alors A a une borne supérieure et $\max A = \sup A$.

si A a un minimum, alors A a une borne inférieure et $\min A = \inf A$.

Cas particulier de l'ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leq)$

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure.

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ a une borne inférieure.

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x = \sup A$ si x est un majorant de A et si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $x - \varepsilon \leq a$. On a $x = \inf A$ si x est un minorant de A et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $a \leq x + \varepsilon$.

Attention : ces caractérisations de la borne supérieure et de la borne inférieure ne sont valables que pour la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$.

Cas particulier de l'ensemble ordonné $(\mathbb{Z}, \leq)$

Toute partie non vide et majorée a un plus grand élément.

Toute partie non vide et minorée a un plus petit élément.

4.3.5 Éléments maximaux, éléments minimaux

Pour un ordre total, il est équivalent de dire que x est plus grand que y , ou que y n'est pas strictement plus petit que x . Pour un ordre partiel, ce n'est pas le cas, car il se peut que x et y ne soient pas comparables. Cela a des conséquences troublantes.

Considérons par exemple la partie de $\mathbb{R}^2$ donnée par $A = \{(1, 2), (4, 0), (0, 0)\}$. Pour l'ordre produit, aucun élément de A n'est plus grand que $(4, 0)$ (sauf $(4, 0)$ lui-même, évidemment). Pourtant $(4, 0)$ n'est pas plus grand que $(1, 2)$, donc $(4, 0)$ n'est pas un majorant de A . Cet exemple illustre le point suivant : pour un ordre partiel, il y a une différence entre " x est un majorant de A " et "aucun élément de A n'est strictement plus grand que x ". Cela justifie la définition générale suivante :

$x \in E$ est un élément maximal de A si $x \in A$ et si aucun élément de A n'est strictement plus grand que x .
 $x \in E$ est un élément minimal de A si $x \in A$ et si aucun élément de A n'est strictement plus petit que x .

Il peut y avoir plusieurs éléments maximaux (resp. minimaux), il peut y en avoir un seul, il peut ne pas y en avoir.

Dans le cas d'une relation d'ordre total, les notions d'élément maximal et d'élément minimal coïncident respectivement avec les notions de plus grand et de plus petit élément. Pour un ordre partiel, ce n'est pas le cas. Toutefois, si A a un plus grand élément, alors il a un unique élément maximal qui est égal au plus grand élément. De même, si A a un plus petit élément, alors il a un unique élément minimal, qui est égal au plus petit élément. Attention, il se peut que A ait un unique élément maximal mais pas de plus grand élément.

4.4 Exemples

Remarque : pour les relations d'ordre total, on ne s'intéressera pas à la notion d'élément maximal, car elle coïncide alors avec celle de plus grand élément.

1) Pour la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$.

1a) Soient a et b des réels, avec $a < b$. Soit $A = [a, b[$. Les majorants de A sont les réels supérieurs ou égaux à b . Les minorants de A sont les réels inférieurs ou égaux à a . L'ensemble A n'a pas de plus grand élément, mais il a une borne supérieure : $\sup A = b$. L'ensemble A a un plus petit élément : $\min A = a$. De ce fait $\inf A$ existe et vaut a .

1b) L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majorée, il n'a donc pas de borne supérieure, ni - a fortiori - de plus grand élément. En revanche, $\mathbb{N}$ a un plus petit élément, qui est 0. Il a donc une borne inférieure : 0.

2) Pour l'ordre produit sur $\mathbb{R}^2$.

2a) Soit $A = \{(0, 0), (0, 1), (2, 0)\}$. Les majorants de A sont les couples (x, y) tels que $x \geq 2$ et $y \geq 1$. L'ensemble A a deux éléments maximaux, qui sont $(0, 1)$ et $(2, 0)$. Il n'a donc pas de plus grand élément. En revanche, il a une borne supérieure : $\sup A = (2, 1)$. Les minorants de A sont les couples (x, y) tels que $x \leq 0$ et $y \leq 0$. L'ensemble A a un plus petit élément : $\min A = (0, 0)$. Donc $\inf A$ existe et $\inf A = \min A = (0, 0)$. De même, il y a unique élément minimal : $(0, 0)$.

2b) Soit $A = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\} \cup (1, 1)$. L'ensemble A n'est pas majoré, il n'a donc pas de borne supérieure ni de plus grand élément. En revanche, il a un élément maximal : $(1, 1)$. L'ensemble A n'est pas minoré, et n'a donc pas de borne inférieure ni de plus petit élément. De plus, il n'a pas d'éléments minimaux.

3) Pour l'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $A = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0\}$. Les majorants de A sont les couples (x, y) tels que $x > 0$. L'ensemble des majorants de A n'a pas de plus petit élément, car si (x, y) majore A , $(x, y - 1)$ aussi, et $(x, y - 1) \preceq (x, y)$. De ce fait, A n'a pas de borne supérieure, bien que A soit non vide et majorée!

De ce fait, A n'a pas de plus grand élément. De plus, A n'est pas minorée, donc n'a pas de borne inférieure, ni de plus petit élément.

4) Pour l'inclusion sur les parties de $\mathbb{N}$.

Soit $A = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4\}\}$. L'ensemble A a deux éléments maximaux : $\{1, 2, 3\}$ et $\{1, 4\}$. Il n'a donc pas de plus grand élément. En revanche, il a une borne supérieure. En effet, les majorants de A sont les parties de $\mathbb{N}$ contenant tous les ensembles $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4\}$, c'est à dire les parties de $\mathbb{N}$ contenant leur union. Leur union est donc un majorant de A , et plus petite que tous les majorants de A . On en déduit que A a une borne supérieure qui est $\{1, 2, 3, 4\}$.

A a trois éléments minimaux : $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, et $\{1, 4\}$. Donc A n'a pas de plus petit élément. En revanche, A a une borne inférieure. En effet, les minorants de A sont les parties de $\mathbb{N}$ incluses dans tous les ensembles $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ et $\{1, 4\}$, donc incluse dans leur intersection. On en déduit que $\inf A = \{1\}$.