Notations pour les sommes, produits, unions et intersections

1 Les sommes

1.1 Introduction

En mathématiques, on considère souvent des sommes d'un grand nombre de termes, ou des produits, des unions d'ensembles, etc., et l'on a besoin pour cela de notations précises. Prenons l'exemple des sommes. Supposons que l'on souhaite désigner la somme des carrés des n premiers entiers non nuls, où $n \in \mathbb{N}$. On peut écrire :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$$

et nous utiliserons d'ailleurs souvent cette notation. Cependant, elle est peu précise (que veulent exactement dire les pointillés ? si je ne connais pas la valeur de n, il se peut que $n = 2$, et dans ce cas, que vient faire le terme 3^2 dans l'expression écrite ci-dessus ? Si on écrit 3+5+7+...+17+19, cela désigne-t-il la somme des nombres premiers compris entre 3 et 19, ou bien la somme des entiers impairs compris entre 3 et 19 ?). De plus, et c'est là le principal problème, elle ne peut pas se généraliser à des situations plus compliquées, dont nous donnerons des exemples à la fin de ce document. Aussi les mathématiciens préfèrent-ils désigner la somme précédente par l'une des expressions suivantes :

$$\sum_{1\leq k\leq n} k^2 \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{k=n} k^2$$

Pour vérifiez que vous suivez, que vaut $\displaystyle\sum_{1\leq k\leq 3} k^2$? Réponse dans la note de bas de page.[1]

De même, soient m et n des entiers naturels. Si l'on veut désigner la somme des carrés de tous les entiers k tels que $m \leq k \leq n$, on peut écrire :

$$m^2 + (m+1)^2 + ... + n^2$$

mais il sera parfois préférable d'utiliser l'une des notations suivantes :

$$\sum_{m\leq k\leq n} k^2 \quad \text{ou} \quad \sum_{k=m}^{n} k^2 \quad \text{ou} \quad \sum_{k=m}^{k=n} k^2$$

Exercice : calculer $\displaystyle\sum_{2\leq k\leq 5} k^2$. Réponse dans la nouvelle note de bas de page. [2]

Dans les expressions précédentes, l'indice k est muet : au lieu de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ on peut écrire $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^2$ ou $\displaystyle\sum_{q=1}^{n} q^2$. Cela désigne toujours la somme des carrés des n premiers entiers non nuls.

[1] On a $\sum_{1\leq k\leq 3} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$.

[2] On a $\sum_{2\leq k\leq 5} k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 4 + 9 + 16 + 25 = 54$

La seule chose qu'il ne faudrait pas écrire, c'est

$$\sum_{n=1}^{n} n^2$$

car n désignerait alors à la fois l'indice générique et la plus grande valeur de l'indice dans la somme, et un même symbole ne peut avoir deux sens différents dans une expression donnée.

1.2 Généralisons...

1) Supposons que pour tout entier naturel k, on se donne un réel a_k. On dit alors que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille de réels indicée par $\mathbb{N}$. Soient m et n des entiers tels que $m \leq n$. Si l'on veut désigner la somme des termes a_k pour k allant de m à n, on peut écrire

$$a_m + a_{m+1} + ... + a_n$$

ou bien utiliser l'une des notations suivantes :

$$\sum_{m\leq k\leq n} a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=m}^{n} a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=m}^{k=n} a_k$$

Les exemples précédents correspondent au cas particulier $a_k = k^2$. Allez, un petit exercice pour digérer : calculer la somme suivante (réponse en note [3])

$$\sum_{k=1}^{4} \cos(k\pi/2)$$

2) Supposons maintenant qu'on veuille désigner la somme des termes a_k pour k dans un certain sous-ensemble I de $\mathbb{N}$. On écrit alors :

$$\sum_{k\in I} a_k$$

Par exemple, si $I = \{2, 3, 7\}$ et $a_k = k^2$, $\displaystyle\sum_{k\in\{2,3,7\}} k^2 = 2^2 + 3^2 + 7^2 = 4 + 9 + 49 = 62.$

3) Un cas particulier important est le suivant : soit $P(k)$ une proposition qui dépend de l'entier naturel k, et qui peut donc être vraie ou fausse suivant les valeurs de k. La notation pour désigner la somme des termes a_k pour les valeurs de k telles que $P(k)$ est vraie est :

$$\sum_{\{k\in\mathbb{N},P(k)\}} a_k \quad \text{ou éventuellement, pour alléger :} \quad \sum_{P(k)} a_k$$

Par exemple[4], soit $P(k)$ la propriété : $2^k \leq 10$. On a alors $\{k \in \mathbb{N}, P(k)\} = \{k \in \mathbb{N}, 2^k \leq 10\} = \{0, 1, 2, 3\}$. Donc

$$\sum_{\{k\in\mathbb{N},2^k\leq 10\}} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

[3] On a $\sum_{k=1}^{4} \cos(k\pi/2) = \cos(\pi/2) + \cos(2\pi/2) + \cos(3\pi/2) + \cos(4\pi/2) = \cos(\pi/2) + \cos(\pi) + \cos(3\pi/2) + \cos(2\pi) = 0 + (-1) + 0 + 1 = 0$. Etonnant. Est-ce que par hasard la somme $\sum_{k=1}^{n} cos(2k\pi/n)$ ferait toujours 0 ?

[4] Si l'on voulait être cohérent avec la notation $\sum_{k\in I} a_k$, il faudrait écrire $\sum_{k\in\{k\in\mathbb{N},P(k)\}} a_k$. On le fera parfois, mais cette notation est lourde.

4) Le plus souvent, l'ensemble auquel appartiennent les indices est l'ensemble des entiers naturels. Mais ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, on peut vouloir considérer la somme des carrés des entiers relatifs compris entre -5 et 5. On écrira alors soit

$$(-5)^2 + (-4)^2 + ... + 5^2$$

soit l'une des expressions suivantes :

$$\sum_{\{k \in \mathbb{Z}, -5 \leq k \leq 5\}} k^2 \quad \text{ou} \quad \sum_{-5 \leq k \leq 5} k^2 \quad \text{ou} \quad \sum_{k=-5}^{5} k^2$$

1.3 Le cas général (ce qu'il suffit de retenir)

D'une manière générale : soit I un ensemble, qu'on appellera ensemble d'indices. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels indicée par I, c'est à dire la donnée d'un réel a_i pour chaque élément i de I. Pour tout i dans I, soit $P(i)$ une proposition.

- Pour désigner la somme de tous les termes a_i tels que $i \in I$, on écrit :

$$\sum_{i \in I} a_i$$

- Pour désigner la somme des termes a_i tels que $i \in I$ et $P(i)$ est vraie, on écrit :

$$\sum_{\{i \in I, P(i)\}} a_i$$

ou simplement $\sum_{P(i)} a_i$ lorsque qu'il n'y a pas ambiguité sur l'ensemble I.

- Dans le cas où I est l'ensemble des entiers relatifs plus grand que m et plus petit que n, on dispose aussi des notations

$$\sum_{m \leq k \leq n} a_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Attention : en général l'ensemble des indices est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, mais ce n'est pas forcé. Supposons par exemple qu'on veuille désigner la somme des carrés des solutions réelles de l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$. On est alors dans le cas où $I = \mathbb{R}$ et où $P(x)$ est la proposition $x^2 - 4x + 3 = 0$. On écrira donc

$$\sum_{\{x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 3 = 0\}} x^2$$

Comme $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, on a donc :

$$\sum_{\{x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 3 = 0\}} x^2 = 1^2 + 3^2 = 10$$

1.4 Compléments

1) **Cas particuliers**. Soient m et n des entiers. Revenons au cas où on cherche à désigner la somme de tous les termes a_k tels que $m \leq k \leq n$. On a les cas particulier suivants :

• *si* $m = n$ *:* il n'y a alors qu'un seul terme dans la somme. Par exemple,

$$\sum_{k=3}^{3} k^2 = 3^2 = 9$$

• *si* $m > n$ *:* il n'y a alors aucun indice k tel que $m \leq k \leq n$. La somme est donc vide et vaut par convention 0. Par exemple,

$$\sum_{k=4}^{3} k^2 = 0$$

• *si pour toutes les valeurs de* k *considérées,* a_k *a la même valeur, c'est à dire si* a_k *ne dépend pas de* k *:* la somme est alors tellement simple à calculer que cela peut vous troubler. Par exemple, supposons que pour tout entier k entre 0 et 5 on ait $a_k = 10$. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = \sum_{k=1}^{5} 10 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 \text{ (5 fois) } = 50$$

Plus généralement, si m et n sont des entiers tels que $m \leq n$:

$$\sum_{k=1}^{n} 10 = 10 + 10 + ... + 10 \text{ (}n\text{ fois) } = 10n$$

et

$$\sum_{k=m}^{n} 10 = 10 + 10 + ... + 10 \text{ (}n - m + 1\text{ fois) } = 10(n - m + 1)$$

Bien sur si $m > n$, on a comme expliqué précédemment : $\sum_{k=m}^{n} 10 = 0$, car la somme est alors vide.

2) **N'écrire que des expressions qui ont un sens.** Au stade où vous en êtes, vous ne savez donner de sens qu'à des sommes finies. Aussi, lorsqu'on considère une somme du type $\sum_{i \in I} a_i$ faut-il bien faire attention à ce que l'ensemble I soit fini (ou sinon à ce que l'ensemble des indices i tels que $a_i \neq 0$ soit fini : la somme ne comportant alors qu'un nombre fini de termes non nuls, elle ne pose pas de problèmes). Plus tard, vous apprendrez à donnez un sens à certaines sommes comportant un nombre infini de termes, grâce à la notion de limite. Vous apprendrez aussi pourquoi il y a des sommes infinies auxquelles on ne peut pas donner de sens.

3) Une même somme peut s'écrire de plusieurs façons. Par exemple, soient $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de réels indicée par $\mathbb{N}$. Supposons qu'on veuille désigner la somme des nombres a_k, pour k pair et compris entre 2 et 20, c'est à dire : $a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{20}$ On a plusieurs choix. On peut tout d'abord écrire :

$$\sum_{k \text{ pair }, 2 \leq k \leq 20} a_k$$

On peut aussi remarquer que l'ensemble des entiers pairs compris entre 2 et 20 est l'ensemble des entiers de la forme $2p$ avec p compris entre 1 et 10. La somme précédente peut donc s'écrire :

$$\sum_{1\leq p\leq 10} a_{2p}$$

Autre exemple : soit n un entier et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{k=4}^{n+3} a_{k-3} = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Pour voir rapidement que les deux premières sommes sont égales, on peut raisonner ainsi : considérons la deuxième somme : pour $k = 0$, on a $k+1 = 1$. Le premier terme de la somme est donc a_1. Pour $k = n-1$, on a $k+1 = n$. Le dernier terme de la somme est donc a_n. On somme donc tous les termes a_i pour i allant de 1 à n, comme dans la première somme. Les deux sommes sont donc égales. On peut vérifier de la même façon que la troisième somme représente toujours la somme des a_i pour i allant de 1 à n.

Exercice : pour tout entier relatif k, on pose $a_k = k^2$. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} a_{2k-5}$? Réponse ici.[5]

2 Le cas des produits, unions, intersections, produits d'ensembles,...

Tout se passe comme pour les sommes, à un point près : définir l'union ou l'intersection d'un nombre infini d'ensembles ne pose aucun problème.

2.1 Les produits

Le symbole pour le produit est $\prod$. Supposons qu'on veuille désigner le produit des carrés des 10 premiers entiers. On écrit alors soit $1^2 \times 2^2 \times .. \times 10^2$, soit, de manière plus précise :

$$\prod_{1\leq k\leq 10} k^2 \quad \text{ou} \quad \prod_{k=1}^{10} k^2$$

Si I est un ensemble d'indices fini, et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels indicée par I, on note $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$ le produit des a_i pour $i \in I$.

2.2 Les unions, intersections et produits d'ensembles (voir aussi le polycopié sur les ensembles .

Les symboles utilisés sont $\bigcup$ pour l'union, $\bigcap$ pour l'intersection, et $\times$ ou $\prod$ pour le produit cartésien. Supposons que pour tout entier naturel k, on dispose d'un ensemble noté A_k. On a :

$$\bigcup_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \quad ; \quad \bigcap_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \quad ; \quad \times_{i=1}^{3} A_i = \prod_{i=1}^{3} A_i = A_1 \times A_2 \times A_3$$

[5] On a $\sum_{k=2}^{4} a_{2k-5} = a_{-1} + a_1 + a_3 = 1 + 1 + 9 = 11$

D'une manière générale, soit I un ensemble (fini ou infini). Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles indicée par I (cela signifie simplement que pour tout i dans I, A_i est un ensemble).

- l'union des ensembles A_i se note $\bigcup_{i\in I} A_i$.
- l'intersection des ensembles A_i se note $\bigcap_{i\in I} A_i$.
- le produit cartésien des ensembles A_i se note $\times_{i\in I} A_i$.

Dans les expressions précédentes, I peut être infini, comme dans l'exemple suivant, où $I = \mathbb{N}$:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n+1[= \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{N}$$

L'ensemble d'indices pourrait même être un ensemble continu, comme l'ensemble des réels (voir l'exercice ci-dessous). Les notations du type $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ ne sont alors pas satisfaisantes. C'est l'une des raisons qui font qu'il est impératif d'introduire des notations précises et générales, même si c'est douloureux au début.

Exercice : pour tout entier relatif k, on pose $A_k = [k, k+10]$. Que valent les unions et intersections suivantes ?

1) $\bigcup_{k=3}^{9} A_k$; 2) $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$; 3) $\bigcap_{k=3}^{9} A_k$; 4) $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$

Réponses ici.[6]

Exercice (plus difficile) : que valent les unions et intersections suivantes ?

1) $\bigcup_{x\in\mathbb{R}} [\sin x, 1 + \sin x]$; 2) $\bigcup_{x\in[1,+\infty[} \left]\frac{1}{x}, x\right[$; 3) $\bigcap_{x\in[1,+\infty[} \left]\frac{1}{x}, x\right[$; 4) $\bigcap_{x\in[1,+\infty[} \left[\frac{1}{x}, x\right]$

Réponses en note, mais ne les consultez pas tout de suite.[7]

Exercice : au restaurant universitaire de l'université Deuxphine, un repas comprend une entrée, un plat et un dessert (on est obligé de prendre les trois et exactement un de chaque). Les choix sont les mêmes tous les jours : l'entrée appartient à l'ensemble $E_1 = \{$carottes, tomates$\}$, le plat à l'ensemble $E_2 = \{$poulet, pizza$\}$ et le dessert à l'ensemble $E_3 = \{$noix de coco, orange, tartelette$\}$.

1) Ecrire quelques exemples d'éléments du produit cartésien $\times_{i=1}^{3} E_i$.

2) Combien d'éléments à l'ensemble $\times_{i=1}^{3} E_i$?

3) On appelle "menu" la donnée d'une entrée, d'un plat et d'un dessert. Combien de menus différents un étudiant de Deuxphine peut-il composer ? Quel rapport avec $E_1 \times E_2 \times E_3$?

Ainsi s'achève, sur un goût de poulet-coco, notre premier séjour au pays des indices. La compagnie MIDO espère que votre séjour a été agréable, et vous souhaite une bonne continuation de voyage.

[6] 1) $[3, 19]$; 2) $[0, +\infty[$; 3) $[9, 13]$; 4) $\emptyset$

[7] 1) $[-1, 2]$; 2) $\mathbb{R}_+^*$; 3) $\emptyset$; 4) $\{1\}$