Corrigé de l'examen d'algèbre 1 du 20 janvier 2010

Question de cours : non, par exemple pour $n=2$ et $A=B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $AB=0$ mais $A\neq 0$ et $B\neq 0$.

Exercice 1 : 1) On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $A^3 = I_2$. Comme $A^3 = I_2$, pour $B = A^2$ on a $AB = I_2$. Donc A est inversible d'inverse $B = A^2$.

2) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. D'après la définition de u_{n+1} et v_{n+1} interprétée de façon matricielle, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = AX_n$, d'où par une récurrence que l'on omet ici, $X_n = A^n X_0$. En particulier, $X_{2010} = A^{2010} X_0$. Or $A^{2010} = (A^3)^{670} = (I_2)^{670} = I_2$, donc $X_{2010} = I_2 X_0 = X_0$ donc $u_{2010} = u_0 = 1$.

Exercice 2 :

1) Soit $j = e^{i2\pi/3}$. On a $j \neq 1$ mais $j^3 = 1^3$ d'où $f(j) = f(1)$. Donc f n'est pas injective. Pour tout $z' \in \mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z : $(1+i\sqrt{3} - z') - z^3 = 0$ a au moins une solution, d'après le théorème de D'Alembert-Gauss (ou plus simplement parce que, comme tout complexe, $1+i\sqrt{3} - z'$ a au moins une racine cubique dans $\mathbb{C}$). Donc f est surjective.

2) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $z \in cl(-5)$ ssi $z\,R(-5)$ ssi $f(z) = f(-5)$ ssi $z^3 = (-5)^3$ ssi $\left(\frac{z}{-5}\right)^3 = 1$ ssi $\frac{z}{-5} \in \{1, j, j^2\}$ ssi $z \in \{-5, -5j, -5j^2\}$.
Donc $cl(-5) = \{-5, -5j, -5j^2\}$, où $j = e^{i2\pi/3}$.

3) Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $f(z) + f(\bar{z}) = 0$ alors $2(1+i\sqrt{3}) - z^3 - \bar{z}^3 = 0$ donc $2(1+i\sqrt{3}) = z^3 + \bar{z}^3 = z^3 + \overline{z^3} = 2\,\mathrm{Re}(z^3) \in \mathbb{R}$. Or ce n'est pas le cas donc il n'y a aucun complexe z tel que $f(z) + f(\bar{z}) = 0$.

4) Soit $C' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - (1+i\sqrt{3})| = 8\}$ le cercle de centre $1+i\sqrt{3}$ et de rayon 8. Montrons que $f(C) = C'$.

$\boxed{f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'}$ Soit $z' \in f(\mathcal{C})$. Il existe $z \in \mathcal{C}$ tel que $z' = f(z)$.
Puisque $z \in \mathcal{C}$, on a $|z| = 2$. On a donc
$|z' - (1+i\sqrt{3})| = |f(z) - (1+i\sqrt{3})| = |-z^3| = |z|^3 = 2^3 = 8$ donc $z' \in \mathcal{C}'$.
Donc $f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'$.

$\boxed{\mathcal{C}' \subset f(\mathcal{C})}$ Soit $z' \in \mathcal{C}'$. On a donc $|z' - (1+i\sqrt{3})| = 8$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z' - (1+i\sqrt{3}) = 8e^{i\theta}$. Soit $z = 2e^{i(\theta+\pi)/3}$.
On a $|z| = 2$ donc $z \in \mathcal{C}$. De plus, $-z^3 = -8e^{i(\theta+\pi)} = 8e^{i\theta}$
donc $z' = f(z)$ donc $z' \in f(\mathcal{C})$, donc $\mathcal{C}' \subset f(\mathcal{C})$.
Donc, par double inclusion, $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

Exercice 3:

1) P est un polynôme à coefficients réels, de degré impair. D'après le cours, P a donc au moins une racine réelle.

2) P est de degré 5, donc il a 5 racines complexes <u>comptées avec leur multiplicité</u>. Donc il ne peut pas avoir de racine de multiplicité strictement plus grande que 5, en particulier P ne peut pas avoir de racines de multiplicité 7. De plus, comme P est à coefficients réels, s'il avait une racine complexe non réelle z de multiplicité 3, $\bar{z}$ serait aussi racine de multiplicité 3, et comme $z \neq \bar{z}$, la somme des multiplicités des racines serait au moins 6, et on a vu que c'est impossible. Donc P ne peut pas avoir de racine ~~réelle~~ non réelle de multiplicité 3.

3) <u>On a</u> : $(2i)^2 = -4$, $(2i)^3 = -8i$, $(2i)^4 = 16$ et $(2i)^5 = -32i$, d'où
$P(2i) = \frac{1}{2}(-32i) + \frac{1}{4}(16) + 4\times(-8i) + 2\times(-4) + 8\times(2i) + 4 = -16i + 4 - 32i - 8 + 16i + 4 = 0$.
et ~~$P(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})$~~ et $P(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{32}\right) + \frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{16}\right) + 4\times\left(-\frac{1}{8}\right) + 2\times\left(+\frac{1}{4}\right) + 8\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 4$
$= -\frac{1}{64} + \frac{1}{64} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 4 + 4 = 0$, donc $P(2i) = P(-\frac{1}{2}) = 0$

4) On a vu que $2i$ et $-1/2$ sont racines de P. Cherchons leur multiplicité.

$P' = \frac{5}{2}X^4 + X^3 + 12X^2 + 4X + 8$ donc $P'(2i) = \frac{5}{2}\times 16 - 8i + 12\times(-4) + 4\times 2i + 8 = 0$

donc $2i$ est racine au moins double. Mais comme P est à coefficients réels, $-2i$ est aussi racine au moins double. Comme $-1/2$ est racine et que la somme des multiplicité est 5, forcément $-1/2$ est racine simple, $2i$ et $-2i$ racines exactement doubles et il n'y a pas d'autres racines. Il existe donc un réel λ tel que $P = \lambda(X-(-1/2))(X-2i)^2(X-(-2i))^2$. Le réel λ est le coefficient dominant de P donc $\lambda = \frac{1}{2}$. La décomposition de P est donc :

dans $\mathbb{C}[X]$: $P = \frac{1}{2}(X+1/2)(X-2i)^2(X+2i)^2$

dans $\mathbb{R}[X]$: $P = \frac{1}{2}(X+1/2)(X^2+4)^2$, où l'on a utilisé $(X-2i)(X+2i) = X^2+4$.

Exercice 4 :

1) On utilise la méthode de Gauss-Jordan en l'adaptant (c'est à dire en faisant des choix malins d'opérations élémentaires) afin de minimiser les calculs nécessaires : on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ puis: } \begin{array}{c} L_1 \\ L_2-2L_1 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\begin{array}{c} L_1-2L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ et enfin: } \begin{array}{c} \\ \\ L_3-aL_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (1-4a) & 2a & -a \end{array}\right).$$

Donc pour toute valeur de a, M_a est inversible et $M_a^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1-4a & 2a & -a \end{pmatrix}$.

N.B : une autre méthode intelligente était de traiter d'abord le cas $a \neq 0$, de trouver M_a^{-1} dans ce cas, et de vérifier que la formule pour M_a^{-1} marche toujours pour $a=0$, montrant ainsi au passage que M_a est toujours inversible pour $a=0$.

2) En notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$, le système s'écrit $M_a^{-1}X = B$.

Il y a donc une solution unique : $X = (M_a^{-1})^{-1}B = M_aB$, c'est à dire $(x_1, x_2, x_3) = (b, 1+2b, 2)$.

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction polynôme. Montrons que f est bijective ssi f est de degré 1. Déjà, si f est de degré 1, il existe $a \neq 0$ et b des complexes tels que $f(z) = az + b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $z' \in \mathbb{C}$, on a donc

$$f(z) = z' \Leftrightarrow az + b = z' \Leftrightarrow z = \frac{1}{a}(z' - b)$$

, si bien que f est bijective.

Réciproquement, supposons f bijective. Il existe donc un unique complexe α tel que $f(\alpha) = 0$, c'est à dire que f a une racine unique. Il existe donc un entier $n \geq 1$ et des complexes λ et α tels que $f(z) = \lambda (z - \alpha)^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. ~~on~~, avec $\lambda \neq 0$. On a $f(\alpha + 1) = \lambda = f(\alpha + e^{i2\pi/n})$. Donc comme f est injective, $\alpha + 1 = \alpha + e^{i2\pi/n}$, donc $1 = e^{i2\pi/n}$, donc $n = 1$, donc f est de degré 1, ce qui termine la preuve.