UNIVERSITE PARIS-DAUPHINE MD1. 13 Novembre 2003

Examen Partiel d'Algèbre 1 2003-2004

Durée 2h : tous documents et calculatrices interdits.

Les trois exercices sont indépendants. Le barême indiqué est approximatif.

Exercice 1 ($\sim$ 5 points) :
Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f \circ f(n) = n + 1.$$

On note $p = f(0) \in \mathbb{N}$.

1.a) Montrer que $f(p) = 1$ et que $f(1) = p + 1$.
1.b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(\, f(p + k) = k + 1$ et $f(k + 1) = p + k + 1\,)$.
1.c) Aboutir à une contradiction et en déduire qu'une telle application f n'existe pas.

Exercice 2 ($\sim$ 11 points) :
Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = z^3 + 10e^{i\pi/4}.$$

2.a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 = 4\sqrt{2}(1 + i).$$

2.b) Calculer $f^{-1}(\{18e^{i\pi/4}\})$. f est-elle injective ?
2.c) f est-elle surjective ?
Dans la suite de l'exercice, on fixe un réel R strictement positif, et on note C le cercle $\{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$.
2.d) Montrer que : $f(C) = \{z \in \mathbb{C}, |z - 10e^{i\pi/4}| = R^3\}$.
2.e) On suppose dans cette question que $R < 2$. Montrer que $f(C) \bigcap C = \emptyset$.
2.f) On suppose dans cette question que $R = 2$. Calculer $f(C) \bigcap C$.

Exercice 3 ($\sim$ 5 points) :
On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{C}$ par :
$\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}$,

$$z\mathcal{R}z' \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists \lambda \in [0,1], z^n = \lambda z'^n.$$

3.a) La relation $\mathcal{R}$ est-elle reflexive ?
3.b) La relation $\mathcal{R}$ est-elle antisymétrique ?
3.c) La relation $\mathcal{R}$ est-elle transitive ?

UNIVERSITE PARIS-DAUPHINE MD1. 15 Novembre 2002

Examen Partiel d'Algèbre 1 2002-2003

Durée 2h : tous documents et calculatrices interdits.

Les trois exercices sont indépendants. Le barême indiqué est approximatif.

Exercice 1 ($\sim$ 9 points) :
Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{2}(1 - i + z + i\bar{z}).$$

On note $D = \{z \in \mathbb{C}, f(z) = z\}$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(i)$. f est-elle injective ?

2. Soit z dans $\mathbb{C}$. Calculer $\overline{f(z)}$, puis montrer que $f \circ f(z) = f(z)$.

3. Montrer que $f(\mathbb{C}) = D$.

4. Quel est l'ensemble $f^{-1}(D)$?

5. f est-elle surjective ?

Exercice 2 ($\sim$ 3 points) :
Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$. On note r_1 le reste de la division euclidienne de a par b, et on note r_2 le reste de la division euclidienne de b par a.
a) Montrer que : $a < b \Longrightarrow r_1 = a$.

b) On suppose $r_1 = r_2$. Montrer que $a = b$.

Exercice 3 ($\sim$ 8 points) :
On note $E = [0, 2\pi[$. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur E par :
$\forall x \in E, \forall x' \in E,$

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow (\ \cos(x) \leq \cos(y) \text{ et } \sin(x) \leq \sin(y)\ ).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E. Est-ce une relation d'ordre totale ?

2. Montrer que pour tout x dans $[\pi, 2\pi[$, on a $x\mathcal{R}0$.
Montrer que pour tout x dans $[\pi/2, 3\pi/2]$, on a $x\mathcal{R}\pi/2$.

3. Soient x dans $[0, \pi/2]$, et y dans E tels que $x\mathcal{R}y$. Montrer que $x = y$.

4. Quels sont les éléments maximaux de E pour la relation $\mathcal{R}$?

UNIVERSITE PARIS-DAUPHINE MD1. 21 Janvier 2004

Examen Final d'Algèbre 1 2003-2004

Durée 2h : tous documents, téléphones et calculatrices interdits.
Les trois exercices sont indépendants. Le barème indiqué est approximatif.

Problème ($\sim$ 11 points) :

I) On se place dans $M_2(\mathbb{R})$, et on note I_2 la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$. On définit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I_2.$$

Ia) Calculer B. Calculer B^n pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Ib) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que :

$$2^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}.$$

Ic) Calculer A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

II) On note I_3 la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$, et on définit la matrice :

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

IIa) Calculer C^2, puis montrer que $C^2 = 3C - 2I_3$.

IIb) On définit par récurrence les suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $C^n = x_n I_3 + y_n C$.

IIc) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer C^n en fonction de n (on ne demande pas de simplifier tous les calculs).

Exercice 1 ($\sim$ 6 points) :
Soit P dans $\mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$.
A) On suppose que P a une racine multiple (c'est-à-dire d'ordre de multiplicité au moins 2) dans $\mathbb{C}$.

A1) Montrer qu'il existe α dans $\mathbb{C}$, et des polynômes R et U de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P = (X - \alpha)R$ et $P' = (X - \alpha)U$.

A2) Montrer qu'il existe V dans $\mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(V) = n-1$ et $PU + P'V = 0$.

B) On suppose que toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont simples. Soient U et V dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $\deg(V) = n - 1$.

B1) Montrer qu'il existe une racine de P qui n'est pas racine de V.

B2) Montrer que $PU + P'V \neq 0$.

Exercice 2 ($\sim$ 3 points) : Soient n un entier strictement positif. On définit le polynôme :

$$P = \sum_{k=0}^{n} X^k = 1 + X + ... + X^n.$$

2.1) Calculer le produit $(1 - X)P$.

2.2) Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

UNIVERSITE PARIS-DAUPHINE MD1. 21 Janvier 2003

Examen Final d'Algèbre 1 2002-2003

Durée 2h : tous documents et calculatrices interdits.

Les trois exercices sont indépendants. Le barême indiqué, sur 21 points, est approximatif.

Exercice 1 ($\sim$ 8,5 points) :
Soient a et b des complexes fixés. On note :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer P^2. En déduire que P est inversible et calculer P^{-1}.
Dans la suite de l'exercice on note $B = P^{-1}AP$.
b) Calculer la matrice B.
c) Calculer B^n pour tout n de $\mathbb{N}$.
d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$.
e) Calculer A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 2 ($\sim$ 8,5 points) :
Soit P un polynôme de degré 6 à coefficients réels tel que :

$$(X+1)^4 | P-2 \;\text{ et }\; (X-1)^3 | P+2.$$

On note $H = P + 2$.
a) Montrer qu'il existe un unique polynôme Q de degré 2 dans $\mathbb{R}[X]$ tq :

$$H = (X+1)^4 Q + 4. \qquad (*)$$

b) Montrer que $H(1) = H'(1) = H''(1) = 0$, et que $Q(1) = -1/4$.
c) Dériver l'équation $(*)$ et montrer que $Q'(1) = 1/2$.
d) Montrer que $Q''(1) = -5/4$.
e) Déterminer Q, puis déterminer P (on ne demande pas de développer tous les calculs).

Exercice 3 ($\sim$ 4 points) : Soient n un entier strictement positif, et $A = (a_{i,j})_{n,n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.
1) Calculer les coefficients diagonaux de la matrice $A\,A^T$ en fonction des coefficients de A.
2) Montrer que :

$$A\,A^T = 0_{M_n(\mathbb{R})} \Longleftrightarrow A = 0_{M_n(\mathbb{R})}.$$