Corrigé de l'examen d'algèbre du 22 janvier 2008

Exercice I $\mathcal{R}$ est à la fois une relation d'équivalence et une relation d'ordre. Elle est donc en particulier réflexive, symétrique et antisymétrique. Ceci étant vu, soient x et y dans E. Supposons $x\mathcal{R}y$. Comme $\mathcal{R}$ est symétrique, on a donc $y\mathcal{R}x$, donc $x\mathcal{R}y$ et $x\mathcal{R}y$. Comme $\mathcal{R}$ est antisymétrique, on a donc $x = y$. Réciproquement, supposons $x = y$. Comme $\mathcal{R}$ est réflexive, $x\mathcal{R}x$, donc $x\mathcal{R}y$ puisque $x = y$. Par double implication, on a bien montré que $x\mathcal{R}y$ ssi $x = y$. [1]

Exercice II a) Il est vrai que si $a \neq 3$, il n'y a aucune solution. En revanche, un système linéaire a toujours zéro, une ou une infinité de solutions. Il n'est donc pas possible que pour $a = 3$ le système ait trois solutions. En outre, les solutions proposées ne sont pas solutions du système. [2]

b) Si $a \neq 3$, il n'y a pas de solutions. Si $a = 3$, il y a plusieurs réponses valables (bien sûr équivalentes) : $S = \{(x, -x/5, 1 - x/5), x \in \mathbb{R}\} = \{(-5y, y - 1, 1 + y), y \in \mathbb{R}\} = \{(5 - 5z, z - 1, z), z \in \mathbb{R}\}$. [3]

Exercice III 1) Le discriminant est $\Delta = 4 - 4i = 4(1 - i) = 4\sqrt{2}e^{-i\pi/4} = (2^{5/4}e^{-i\pi/8})^2$. Les solutions sont donc $z_1 = -1 - 2^{1/4}e^{-i\pi/8}$ et $z_2 = -1 + e^{-i\pi/8}$.

2) Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq deg(P)$. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, $P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)\frac{(X-a)^k}{k!}$. [4]

3a) On trouve : $P(1) = 0$, $P'(1) = 0$, $P''(1) = 12 + 4i$, $P'''(1) = 48$, $P^{(4)}(1) = 48$ et $P^{(k)}(1) = 0$ pour tout entier $k \geq 5$.

3b) On a $P(1) = P'(1) = 0$ et $P''(1) \neq 0$, donc 1 est racine double de P : $m = 2$. Le polynôme $(X - 1)^2$ divise donc P. Le reste de la division euclidienne de P par $(X - 1)^2$ est donc nul.

3c) D'après la formule de Taylor appliquée au point 1 et compte tenu du fait que P est de degré 4, on a $P = \sum_{k=0}^{4} P^{(k)}(1)\frac{(X-1)^k}{k!}$. En utilisant les valeurs du b) on obtient :

$$P = (6 + 2i)(X - 1)^2 + 8(X - 1)^3 + 2(X - 1)^4 = (X - 1)^2[6 + 2i + 8(X - 1) + 2(X - 1)^2]$$

En développant l'expression entre crochets puis en simplifiant il vient :

$$P = (X - 1)^2(2X^2 + 4X + 2i) = 2(X - 1)^2(X^2 + 2X + i)$$

3d) Il suit de la question 1) que $X^2 + 2X + i = (X - z_1)(X - z_2)$, où z_1 et z_2 sont les complexes définis au 1). On a donc :

$$P = 2(X - 1)^2(X + 1 + 2^{1/4}e^{-i\pi/8})(X + 1 - 2^{1/4}e^{-i\pi/8})$$

Exercice IV 1) En utilisant la méthode de Gauss-Jordan (voir cours) on trouve que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Il y a exactement 8 matrices diagonales de carré D : ce sont les matrices du type $Diag(x, y, z)$ avec $x \in \{1, -1\}$, $y \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, $z \in \{1, -1\}$. On pouvait donner n'importe laquelle de ces matrices, la plus populaire ayant été $M = Diag(1, \sqrt{2}, 1)$.

3) Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Pour tout entier naturel k, notons H_k la propriété : $(Q^{-1}BQ)^k = Q^{-1}B^kQ$. Montrons par récurrence que H_k est vraie pour tout entier naturel k.

Initialisation : on a $Q^{-1}B^0Q = Q^{-1}I_3Q = Q^{-1}Q = I_3 = (Q^{-1}BQ)^0$, donc H_0 est vraie.

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons H_k vraie. En utilisant H_k pour la deuxième égalité, on obtient : $(Q^{-1}BQ)^{k+1} = (Q^{-1}BQ)^kQ^{-1}BQ = Q^{-1}B^kQQ^{-1}BQ = Q^{-1}B^kI_3BQ = Q^{-1}B^{k+1}Q$. Donc H_{k+1} est vraie.

---

[1] La transitivité de $\mathcal{R}$ n'a pas été utilisée.

[2] Beaucoup d'entre vous semblent croire : 1) qu'un système linéaire de n équations à n inconnues a toujours exactement une solution (c'est faux, un tel système peut également ne pas avoir de solutions, ou en avoir une infinité ; la confusion semble venir d'une confusion entre le rang d'un système et son nombre d'équations initial, avant de le transformer et d'éliminer le cas échéant des lignes redondantes) ; 2) qu'un système linéaire avec strictement plus d'inconnues que d'équations a toujours une infinité de solutions (c'est faux, ce qui est vrai c'est qu'un tel système soit n'a aucune solution, soit en a une infinité).

[3] Attention : beaucoup d'entre vous écrivent $S = \{(x \in \mathbb{R}, -x/5, 1 - x/5)\}$ au lieu de $S = \{(x, -x/5, 1 - x/5), x \in \mathbb{R}\}$.

[4] Ceux qui n'ont pas précisé que n était le degré de P ou un entier supérieur ou égal au degré de P ont eu la moitié des points.

Donc H_k est vraie pour tout entier naturel k. En appliquant ce résultat à $Q = P$ et à $Q = P^{-1}$, on obtient que pour tout entier naturel k, $(P^{-1}BP)^k = P^{-1}B^kP$ et $(PBP^{-1})^k = PB^kP^{-1}$.

4) Soit C dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. D'après 3), avec $k = 2$ et $B = C$, $(PCP^{-1})^2 = PC^2P^{-1}$. Donc il suffit de montrer que $C^2 = A$ ssi $PC^2P^{-1} = D$.

Si $C^2 = A$ on a $PC^2P^{-1} = PAP^{-1} = D$. Réciproquement, si $PC^2P^{-1} = D$, on a $C^2 = I_3C^2I_3 = P^{-1}PC^2P^{-1}P = P^{-1}DP = P^{-1}PAP^{-1}P = I_3AI_3 = A$ Par double implication, on a bien montré que $C^2 = A$ ssi $PC^2P^{-1} = D$. [5]

5) Soit C dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. D'après le 4), $C^2 = A \Leftrightarrow (PCP^{-1})^2 = D$ donc $C^2 = A \Leftrightarrow (PCP^{-1})^2 = M^2$. Une condition suffisante (mais pas nécessaire !) pour que $C^2 = A$ est donc que $PCP^{-1} = M$. [6] Il suffit donc que $C = P^{-1}MP$. Pour $M = Diag(1, \sqrt{2}, 1)$ on obtient

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de carré A. Nous allons montrer que E a au moins 8 éléments, donc strictement plus de deux. Soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de carré D. Comme expliqué au 2), F a au moins 8 éléments. Pour montrer que E a au moins 8 éléments, il suffit donc de montrer qu'il existe une surjection de E dans F. Soit $f : E \to F$ telle que pour tout C dans E, $f(C) = PCP^{-1}$. D'après la question 4), $f(C) \in F$ donc f est bien définie. Montrons que f est surjective. Soit $B \in D$. Soit $C = P^{-1}BP$. En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} on obtient : $PCP^{-1} = B$, donc $C \in E$ d'après 4) et de plus $f(C) = B$. B a donc au moins un antécédent par f. Donc f est surjective, ce qui termine la preuve. [7]

Exercice V L'exercice a été très mal réussi. Je rédige donc de manière très détaillée. Je ne vous demande pas de rédiger de manière aussi détaillée, mais au minimum que ce que vous écriviez ait un sens.

1) Montrons tout d'abord que si f est injective alors, pour toutes parties A et A' de E, $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$. Supposons f injective. Soient A et A' des parties de E. Notons que, non parce que f est injective mais parce que c'est toujours vrai et dans votre cours, $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$. De plus, si $y \in f(A) \cap f(A')$, alors $y \in f(A)$ et $y \in f(A')$. Il existe donc x dans A tel que $y = f(x)$ et x' dans A' tels que $y = f(x')$. Comme $f(x) = f(x')$ et que f est injective, on a $x = x'$. Donc $x \in A \cap A'$. Donc $f(x) \in f(A \cap A')$. Donc $y \in f(A \cap A')$. Donc $f(A) \cap f(A') \subset f(A \cap A')$ et par double inclusion $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

Réciproquement, montrons que si f n'est pas injective, alors il existe des parties A et A' de E telles que $f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')$.

Supposons f non injective. Il existe donc x et x' dans E tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$. Posons $A = \{x\}$ et $A' = \{x'\}$. On a $A \cap A' = \emptyset$ donc $f(A \cap A') = \emptyset$. Mais $f(A) = \{f(x)\} = \{f(x')\} = f(A')$ donc $f(A) \cap f(A') = \{f(x)\} \neq \emptyset$. Donc $f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')$.

2) Bien sûr, si f est bijective, par exemple si $f = Id_E$. Beaucoup d'entre vous continuent à croire que si une application est surjective elle n'est pas injective, c'est à dire que les applications bijectives n'existent pas.

Bon courage et bonne chance pour la suite de vos études, et surtout de votre vie.

[5] Certains semblent penser que si P et Q sont deux matrices carrées de même taille et k un entier naturel quelconque, alors $(PQ)^k = P^kQ^k$. C'est faux, même si P et Q sont inversibles. En revanche, c'est vrai lorsque P et Q commutent.

[6] Beaucoup semblent croire que si P et Q sont deux matrices carrées de même taille, alors $P^2 = Q^2 \Leftrightarrow P = Q$. C'est très faux. Bien sûr, si $P = Q$, alors $P^2 = Q^2$, mais ce n'est pas du tout réciproque. Ne pas croire non plus que si Q est une matrice carrée donnée non nulle, il y a exactement deux matrices P telles que $P^2 = Q^2$: il peut en exister une infinité. Par exemple, pour tout réel x non nul, $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 1/x & 0 \end{pmatrix}^2 = I_2 = (I_2)^2$

[7] En fait, il est facile de montrer que f est bijective. On peut également montrer qu'il y a une infinité de matrices non diagonales de carré D, donc F est infini. Ceci implique que E est infini.