Examen d'algèbre 1 du 21 janvier 2009 : corrigé

Question de cours : le théorème de Cantor-Bernstein s'énonce ainsi :
Soient E et F des ensembles. S'il existe $f : E \to F$ injective et $g : E \to F$ surjective, alors il existe $h : E \to F$ bijective
[Il y a d'autres formulations possibles].

Exercice I : a) $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}_+$; b) $\mathbb{N}$ et $[0,\pi]$
c) A n'a pas de plus grand élément ; d) $\inf A = \mathbb{N} \cap [0,\pi] = \{0,1,2,3\}$

Exercice II : 1) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2) $A^2X = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - 3L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right)$.

$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ -\frac{1}{3}L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 - 3L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow X \in \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$.

3) D'après 2), $A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. Or $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$. Donc A^2 n'est pas inversible (car si une matrice M est inversible, alors pour toute matrice N telle que MN est définie, si N est non nulle alors MN est non nulle). Donc A n'est pas inversible (sinon A^2 le serait comme puissance d'une matrice inversible).

4) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de (S). De plus le système homogène associé à (S) est le système (S_0) : $AX = 0$, et l'on a :
$AX = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow X \in \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$. L'ensemble des solutions de (S) est donc :

$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ 1-t \\ 1+t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$.

5) D'après les questions 2) et 4), on a : $AX=0 \iff X \in \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$ $\iff A^2X=0$, et ce pour tout $X \in \mathcal{M}_{3,1}$. [On peut aussi raisonner ainsi : soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}$. Si $AX=0$ alors $A \times AX = A \times 0 = 0$ donc $A^2X=0$.
Réciproquement, si $A^2X=0$ alors d'après 2), il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $X = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$ et l'on a donc $AX = A\begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-t \\ t-2t+t \\ -t+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.
Donc $AX=0 \iff A^2X=0$].

6) Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on ~~pose~~ appelle R_k le résultat :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{3,1},\ A^kX=0 \iff AX=0.$$

Montrons par récurrence que R_k est ~~vrai~~ pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.

Initialisation : R_1 est trivialement vraie.

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons R_k vraie. Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}$ et $Y = A^{k-1}X$.

On a :
$$\begin{aligned} A^{k+1}X = 0 &\iff A^2(A^{k-1}X) = 0 \iff A^2Y = 0 \\ &\iff AY = 0 \quad (\text{par } 5)) \\ &\iff AA^{k-1}X = 0 \iff A^kX = 0 \\ &\iff AX = 0 \quad (\text{par } R_k). \end{aligned}$$

donc R_{k+1} est vrai. Donc, par récurrence, R_k est vrai pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.

7) Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $AX \neq 0$ donc d'après 6), $A^{2009}X \neq 0$ donc $A^{2009} \neq 0$.

Exercice III :

1) Puisque $P' | P$, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = QP'$. De plus $\deg P = \deg Q + \deg P'$ et comme P n'est pas constant, $\deg P' = (\deg P) - 1$. Donc $\deg Q = 1$. Donc il existe des complexes $a \neq 0$ et b tels que $Q = aX+b$. En posant $\lambda = a$ et $\alpha = -b/a$ on obtient $Q = \lambda(X-\alpha)$ donc $P = \lambda(X-\alpha)P'$.

2) $P = \sum_{k=0}^{n} b_k P_k$. $\quad P' = \sum_{k=0}^{n-1} P'^{(k)}(\alpha) \dfrac{(X-\alpha)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} P_k$

(car $P'^{(k)} = P^{(k+1)}$)

3/4

3) On a $P' = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} P_k$. De plus d'après 1), $P = \lambda(X-\alpha)P'$.

Donc $P = \lambda(X-\alpha)\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}P_k = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}(X-\alpha)\frac{(X-\alpha)^k}{k!}$

$$= \lambda\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}\frac{(X-\alpha)^{k+1}}{k!} = \lambda\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}(k+1)\frac{(X-\alpha)^{k+1}}{(k+1)!} = \lambda\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}(k+1)P_{k+1}$$

En réindiçant, on obtient $P = \lambda\sum_{j=1}^{n} b_j \times j\, P_j$. De plus, $b_0\times 0\times P_0 = 0$

($j = k+1$) donc $\boxed{P = \lambda\sum_{j=0}^{n} b_j\, j\, P_j = \lambda\sum_{k=0}^{n} b_k\, k\, P_k}$.

De plus d'après 2), $P=\sum_{k=0}^{n} b_k P_k$. Donc $\sum_{k=0}^{n} b_k P_k = \lambda\sum_{k=0}^{n} b_k k P_k$

donc $\sum_{k=0}^{n} b_k(1-\lambda k)P_k = 0$. Or on sait que si $P_0, P_1, \dots, P_k, \dots, P_n$ sont des polynômes tels que, pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$, $\deg P_k = k$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des complexes tels que $\sum_{k=0}^{n} a_k P_k = 0$, alors $a_0=a_1=\dots=a_n=0$. En appliquant ce résultat avec $a_k = b_k(1-\lambda k)$ on obtient que pour tout k dans $\{0,1,\dots,n\}$, $\boxed{b_k(1-\lambda k)=0}$.

4) On a $b_n = P^{(n)}(\alpha)$. Comme P est de degré n, $P^{(n)}$ est de degré $n-n=0$, donc $P^{(n)}$ est un polynôme constant non nul et donc $P^{(n)}(\alpha)\neq 0$. Donc $b_n\neq 0$. Or d'après 3), $b_n(1-\lambda n)=0$ donc $1-\lambda n=0$ donc $\boxed{\lambda = 1/n}$.

5) D'après 3), pour tout k dans $\{0,1,\dots,n-1\}$, $b_k(1-\lambda k)=0$. Or $\lambda = 1/n$. Donc si $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$, on a :

$b_k\left(1-\frac{k}{n}\right)=0$ et $\frac{k}{n}<1$ donc $1-\frac{k}{n}\neq 0$, donc $b_k=0$.

6) D'après 2) et 5) on a : $P=\sum_{k=0}^{n} b_k P_k = b_n P_n$ (car $b_k=0$ pour $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$)

donc $P = b_n\frac{(X-\alpha)^n}{n!}$. En posant $\mu=\frac{b_n}{n!}$ on obtient $P_n=\mu(X-\alpha)^n$.

De plus, $b_n\neq 0$ d'après 4), donc $\mu\neq 0$.

4/4

Exercice IV.

1) D'après le cours, pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) \subset B$

En prenant $B = f(A)$ on obtient $f(f^{-1}(f(A))) \subset f(A)$.

2) D'après le cours, $A \subset f^{-1}(f(A))$ et si $A \subset A'$ alors $f(A) \subset f(A')$, donc $f(A) \subset f(f^{-1}(f(A)))$.