UNIVERSITE PARIS-DAUPHINE DUMI2E 1ère année, 22 janvier 2008

Examen d'algèbre 1

Durée 2h. Tous documents et calculatrices interdits. Les exercices sont indépendants. Le barême indiqué est approximatif. Sauf mention contraire, les réponses doivent être justifiées soigneusement. **Il faut tourner la page !**

Exercice I (2,5pts) Soit E un ensemble non vide. Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E. On suppose que $\mathcal{R}$ est à la fois une relation d'ordre et une relation d'équivalence. Montrer que, pour tout x et y dans E,

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$$

Exercice II (2pts) On demande à un étudiant de résoudre le système avec paramètre suivant, en fonction de la valeur du paramètre réel a :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ x + 2y + 3z = a \\ x + 5y = 0 \end{cases}$$

a) (1pt) L'étudiant répond : "Si $a \neq 3$, il n'y a aucune solution. Si $a = 3$, les solutions sont $(-5, 4, 0)$, $(0, 4, 5/3)$ et $(-2, 4, 3)$". Sans calculs, dire si la réponse est entièrement exacte.

b) (1pt) Sans justifier, donner les solutions du système ci-dessus, en fonction de la valeur de a.

Exercice III (6pts)

1) (1pt) Déterminer les nombres complexes solutions de $z^2 + 2z + i = 0$.

2) (1pt) Donner la formule de Taylor pour les polynômes à coefficients complexes.

3) Soit P le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ donné par $P = 2X^4 + (-6+2i)X^2 + (4-4i)X + 2i$

3a) (1pt) Donner (sans justifier) la valeur de toutes les dérivées successives de P au point 1 (calculer soigneusement !).

3b) (1pt) Montrer que 1 est racine de P et déterminer sa multiplicité, qu'on notera m dans toute la suite. Que vaut le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^m$?

3c) (1pt) Exprimer le polynôme P comme combinaison des polynômes $(X-1)^k$, $k \in \{0, 1, ..., 5\}$, puis factoriser $(X-1)^m$ dans l'expression obtenue.

3d) (1pt) Décomposer le polynôme P en produit de polynômes de degré 1.

Exercice IV (6,5pts) Soient P, A, D les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) (1pt) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

2) (0,5pt) Sans justifier, donner une matrice diagonale M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = D$. Dans la suite, M désignera une telle matrice.

3) (1pt) Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout entier naturel k, $(P^{-1}BP)^k = P^{-1}B^kP$ et $(PBP^{-1})^k = PB^kP^{-1}$.

4) (1 pt) On admet que $PAP^{-1} = D$. Montrer que pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$C^2 = A \Leftrightarrow (PCP^{-1})^2 = D$$

5) (1pt) Déterminer explicitement (en donnant ses coefficients) une matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A$.

5) (2pts) Y-a-t-il une, deux ou strictement plus de deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le carré est égal à A ? Justifier.

Exercice V (3pts) Soit E un ensemble non vide et $f : E \to E$ une application.

1) (2,5pts) Montrer que f est injective si et seulement si

$$\forall A \subset E, \forall A' \subset E, f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$$

2) (0,5pt) Est-il possible que f soit surjective et vérifie la propriété ci-dessus ?