Institut Tunis Dauphine MI2E 1ère année, mardi 2 février 2010

Examen d'algèbre 1

Durée 2h. Documents et appareils électroniques interdits. Le barême est approximatif.

Sauf mention contraire, les réponses doivent être justifiées.

Notation : $\mathcal{M}_{n,p}$ désigne l'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients réels, et $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{n,n}$.

Questions de cours (3pts).

1) Enoncer la formule de Taylor pour les polynômes.

2) Sans justification, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

a) un système linéaire de 3 équations à 4 inconnues de rang 3 a une infinité de solutions ;

b) un système linéaire de 6 équations à 6 inconnues a au moins une solution ;

c) un système linéaire de 6 équations à 6 inconnues a au plus une solution ;

d) un système linéaire homogène de 4 équations à 5 inconnues a une infinité de solutions.

Exercice 1 (2,5pts). Soit P la proposition suivante :

" Pour tout entier n dans $\mathbb{N}^*$, pour toute matrice carrée A dans $\mathcal{M}_n$ et pour tous vecteurs-colonnes X, Y et B dans $\mathcal{M}_{n,1}$, si $AX = B$ et $AY = B$ alors $X = Y$."

1) Quelle est la négation de la proposition P ?

2) La proposition P est-elle vraie ? Si oui, le prouver. Sinon, donner un contre-exemple (on pourra essayer de comprendre ce qu'affirme la proposition P sur les solutions de certains systèmes linéaires).

Exercice 2 (2,5 pts). Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $z^3 = \bar{z}^3$. Que représente cet ensemble géométriquement.

Exercice 3 (5pts). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que pour toute matrice A dans $\mathcal{M}_n$, il existe une matrice inversible P telle que la matrice PA soit échelonnée réduite, et que d'autre part si $M \in \mathcal{M}_n$ est échelonnée réduite, alors soit $M = I_n$ (la matrice identité d'ordre n), soit la dernière ligne de M est nulle.

1) Il a été vu en cours que si $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible, alors A^k est inversible pour tout k dans $\mathbb{N}$. Rédémontrer ce résultat.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n$ une matrice non inversible, et k un entier naturel non nul.

a) Soit $M \in \mathcal{M}_n$ une matrice ayant une ligne de 0. Montrer qu'il existe un vecteur-ligne non nul X de format $(1, n)$ tel que $XM = 0$. En déduire que M n'est pas inversible.

b) Montrer qu'il existe un vecteur-ligne non nul Y de format $(1, n)$ tel que $YA = 0$ et $YA^k = 0$. En déduire que A^k n'est pas inversible.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n$. Montrer que A est inversible si et seulement si A^2 est inversible.

Exercice 4 (5pts).

1) Soit P un polynôme non nul à coefficients réels tel que $P + (P'')^2 = 0$, où P'' désigne le polynôme P dérivé deux fois.

a) Montrer que P est de degré 4.

b) Montrer qu'il existe un réel λ et des complexes r_1 et r_2 tels que $P'' = \lambda(X - r_1)(X - r_2)$.

c) En supposant $r_1 \neq r_2$, montrer que r_1 est racine de multiplicité exactement 2 de P et aboutir à une contradiction.

d) En déduire que $P'' = \lambda(X - r_1)^2$ et que r_1 est réel.

2) Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels tels que $P + (P'')^2 = 0$.

Exercice 5 (2pts). Soit E un ensemble. Soient f et g des applications de E dans E. On suppose que pour toute partie A de E on a $f(A) \subset g(A)$. Montrer que $f = g$.