Examen d'algèbre 1

Durée 2h. Tous documents et tous engins électroniques interdits. Le barème est approximatif. Il faut tourner la page. Sauf mention contraire, les réponses doivent être justifiées.

Question de cours (1pt) : énoncer de manière précise le théorème de Cantor-Bernstein.

Exercice I (aucune justification demandée) (2pts) On considère l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ ordonné par la relation d'inclusion. Soit

$$A = \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}_+, [0, \pi], \mathbb{N}, \mathbb{Q}\}.$$

Sans justifier, donner s'ils existent (et s'ils n'existent pas, le dire) :

a) les éléments maximaux de A ;
b) les éléments minimaux de A ;
c) le plus grand élément de A ;
d) la borne inférieure de A.

Exercice II (8 pts) On note $\mathcal{M}_{3,1}$ l'ensemble des matrices 3×1 à coefficients réels. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}.$$

1) (0,5pt) Que vaut A^2 (aucune justification demandée) ?

2) (1,5pt) Montrer que : $A^2X = 0 \Leftrightarrow X \in \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$

3) (1pt) La matrice A est-elle inversible ? Justifier.

4) (1pt) Trouver une solution particulière du système (S) suivant, puis le résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

5) (1pt) Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}, A^2X = 0 \Leftrightarrow AX = 0$. (On pourra utiliser la question 2)).

6) (2pts) En rédigeant soigneusement, montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$:

$$\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}, A^kX = 0 \Leftrightarrow AX = 0$$

7) (1pt) Montrer que $A^{2009} \neq 0$.

Exercice III (7,5 pts) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que P' divise P.

1) (1pt) Montrer qu'il existe λ dans $\mathbb{C}^*$ et α dans $\mathbb{C}$ tels que $P = \lambda(X-\alpha)P'$. *Dans la suite, pour tout k dans $\{0, 1, ..., , n\}$, on notera $b_k = P^{(k)}(\alpha)$ et $P_k = \dfrac{(X-\alpha)^k}{k!}$.*

2) (1pt) Ecrire la formule de Taylor au point α pour P puis pour P'.

3) (3pts, relativement difficile) Montrer que

$$P = \lambda \sum_{k=0}^{n} b_k k P_k.$$

En déduire que pour tout k dans $\{0, 1, ..., n\}$, $b_k(1 - \lambda k) = 0$.

4) (1pt) Montrer que $b_n \neq 0$. En déduire que $\lambda = 1/n$.

5) (0,5pt) Montrer que pour tout k dans $\{0, 1, ..., n-1\}$, $b_k = 0$.

6) (1pt) Montrer qu'il existe μ dans $\mathbb{C}^*$ tel que $P = \mu(X-\alpha)^n$.

Exercice IV (2 pts) (les résultats vus en cours ne sont pas à redémontrer)

Soient E et F des ensembles. Soit $A \subset E$. Soit $f : E \to F$ une application.

1) A-t-on forcément $f(f^{-1}(f(A))) \subset f(A)$? Si oui le prouver, sinon donner un contre-exemple.

2) A-t-on forcément $f(A) \subset f(f^{-1}(f(A)))$? Si oui le prouver, sinon donner un contre-exemple.