

Examen d'algèbre 1

Durée 2h. Documents et appareils électroniques interdits. Le barème est approximatif.

Sauf mention contraire, les réponses doivent être justifiées.

Question de cours (1pt). Est-il vrai que pour tout entier n dans \mathbb{N}^* , pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$? Justifier.

Exercice 1 (3,5pts). Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

- 1) (1,5pt) Calculer A^2 et A^3 . En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
- 2) (2pts) Soient les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 1793$ et, pour tout n dans \mathbb{N} ,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -\frac{1}{2}u_n + \frac{\sqrt{3}}{2}v_n \\ v_{n+1} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}u_n - \frac{1}{2}v_n \end{cases}$$

Que vaut u_{2010} ? Justifier brièvement.

Exercice 2 (5pts). Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application donnée par, pour tout z dans \mathbb{C} ,

$$f(z) = 1 + i\sqrt{3} - z^3.$$

- 1) (1pt) f est-elle injective? surjective?
- 2) (1pt) On définit la relation \mathcal{R} sur \mathbb{C} par, pour tous complexes z et z' , $z\mathcal{R}z'$ si et seulement si $f(z) = f(z')$. On admet qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Quelle est la classe d'équivalence de -5 ?
- 3) (1pt) Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $f(z) + f(\bar{z}) = 0$.
- 4) (2pts) Soit $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 2\}$ le cercle de centre 0 et de rayon 2. Montrer que l'image de \mathcal{C} par f est un cercle, qu'on déterminera.

Exercice 3 (5pts). On considère le polynôme

$$P = \frac{1}{2}X^5 + \frac{1}{4}X^4 + 4X^3 + 2X^2 + 8X + 4.$$

- 1) (0,75pt) Sans calculs, peut-on être sûr que P a une racine réelle?
- 2) (0,75pt) P peut-il avoir une racine complexe non réelle de multiplicité 7? de multiplicité 3?
- 3) (0,5pt) Montrer que $P(2i) = P(-1/2) = 0$.
- 4) (3pts) Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 (4pts). Soit a un réel et M_a la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 2a & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1) (2,5pts) Montrer que la matrice M_a est inversible pour n'importe quelle valeur de a . Déterminer son inverse en fonction de a .
- 2) (1,5pt) Résoudre en fonction de la valeur des paramètres réels a et b le système linéaire suivant (on pourra utiliser le 1)).

$$\begin{cases} 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ (1 - 4a)x_1 & + & 2ax_2 & - & ax_3 & = & b \end{cases}$$

Exercice 5 (difficile, à faire en dernier) (2pts). Déterminer l'ensemble des fonctions polynômes de \mathbb{C} dans \mathbb{C} qui sont bijectives.