Examen d'algèbre 1

Durée 2h. Documents et appareils électroniques interdits. Le barême est approximatif.

Sauf mention contraire, les réponses doivent être justifiées.

Questions de cours (4,5pts)

1) (1pt) Sans justifier, parmi les ensembles suivants, dire ceux qui sont dénombrables et ceux qui ne sont pas dénombrables : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

2) (0,5pt) Enoncer le théorème de division euclidienne sur $\mathbb{Z}$.

3) (1pt) Est-il possible de trouver un entier n dans $\mathbb{N}^*$ et deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^k = B^k$ pour tout entier naturel $k \geq 2$ mais $A \neq B$? Justifier.

4) (1,5pt) Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner la définition de la trace d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée $Tr(M)$, puis redémontrer que $Tr(AB) = Tr(BA)$.

Exercice 1 (4,5pts) Soient A, B et C les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) (1pt) Pour tout entier naturel n, calculer B^n et C^n.

2) (1,5pt) Calculer A^{20} (on ne cherchera pas à simplifier l'expression des coefficients de la matrice obtenue).

3) (2pts) Parmi les matrices A, B et C, dire lesquelles sont inversibles, et déterminer leur inverses.

Exercice 2 (6pts)

1) (1pt) Enoncer la formule de Taylor pour les polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

2) (1pt) Déterminer le reste dans la division euclidienne de $X^9 - 2X^8 + X^5 - X^2 + 1$ par X^3.

3) (1pt) Soient P_0, P_1, P_2 trois polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $deg(P_k) = k$ pour tout $k \in \{0,1,2\}$. Soient a_0, a_1, a_2 des réels. Redémontrer que $a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2 = 0$ si et seulement si $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

4) Soit P un polynôme de degré $n \geq 3$ et R le reste dans la division euclidienne de P par $(X-1)^3$.

4a) (1pt) Montrer que $R = P(1) + P'(1)(X-1) + P''(1)\dfrac{(X-1)^2}{2}$.

4b) (1pt) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la valeur de P et de ses dérivés au point 1 pour que $(X-1)^3$ divise P. Rédémontrer que cette condition est nécessaire et suffisante.

4c) (1pt) Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2X^{10} - 9X^5 + 26X$ par $(X-1)^3$.

Exercice 3 (5pts) Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par, pour tout z dans $\mathbb{C}^*$, $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{3}{z}\right)$.

1) (1,5pt) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2iz + 3 = 0$, puis déterminer $f^{-1}(\{i\})$.

2) (1pt) L'application f est-elle injective ? surjective ?

3) (2,5pts) Soit $A = \{z \in \mathbb{C}, |z| = \sqrt{3}\}$. Déterminer $f(A)$. A-t-on $f(A) \subset \mathbb{R}$? L'image directe d'un cercle par f est-elle toujours un cercle ?

Question bonus Montrer que toute matrice inversible peut s'écrire comme le produit d'un nombre fini de matrices d'opérations élémentaires.