Université Paris-Dauphine DUMI2E 1ère année, 26 janvier 2007

Examen d'algèbre 1

Durée 2h. Tous documents et calculatrices interdits.

Les exercices sont indépendants. Le barème indiqué, sur 21 pts, est approximatif. Les réponses doivent être justifiées. Il sera tenu compte de la rédaction. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. **Il faut tourner la page !**

Exercice I (environ 2 pts)

Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Exercice II (environ 3 pts)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons INV_n l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \exists P \in INV_n, A = BP$$

La relation $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence ?

Exercice III (environ 6 pts)

1) (0,5 pt) Soient n et k des entiers non nuls. Soit I_n la matrice identité d'ordre n. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(I_n - M)(I_n + M + M^2 + ... + M^k) = I_n - M^{k+1}$.

2) (1,5 pt) Soient a et b des réels. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer M^2 et M^3. Soit $A = I_3 + M + M^2$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

3) (2,5 pts) Soit $B = I_3 - M$. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) (1,5 pt) En utilisant les résultats du 2) et du 3), déterminer l'ensemble des vecteurs-colonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tels que $A^{10}X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice IV (environ 7 pts) (les questions 1), 2), 3) et 4) sont indépendantes les unes des autres)

1) (2 pts) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soient $z_1, z_2, ..., z_m$ des complexes deux à deux distincts. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $P(z_i) = P'(z_i) = 0$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$P = (X - z_m)^2 Q \qquad (*)$$

Montrer que pour tout $i \in \{1, ..., m-1\}$, $Q(z_i) = Q'(z_i) = 0$ (on pourra dériver $(*)$).

2) (1,5 pt) Déterminer l'ensemble des quadruplets $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que le polynôme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ vérifie $P(0) = P'(0) = 0$ et $P(1) = P'(1)$.

3) (1,5 pts) Soit P le polynôme à coefficients complexes : $P = X^3 - X^2 + 2iX - 2i$. Vérifier que $P(1) = 0$, puis décomposer P en produit de polynômes de degré 1. (les racines de P pourront être données sous forme trigonométrique ou sous la forme $x + iy$).

4) Soient $z_1, z_2, ..., z_m$ des complexes deux à deux distincts. Soient $z'_1, z'_2, ..., z'_m$ des complexes.

4a) (1pt) Montrer qu'il existe au plus un polynôme P de degré inférieur ou égal à $m - 1$ tel que, pour tout $i \in \{1, ..., m\}$, $P(z_i) = z'_i$.

4b) (1pt) Déterminer l'ensemble des polynômes P de degré au plus 2 tels que $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ et $P(3) = 3$.

Exercice V (environ 3 pts) (relativement difficile)

Soit E un ensemble quelconque. Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.