

Chapitre 3 : Applications

1 Introduction

Une fonction f (plus précisément, une fonction réelle d'une variable réelle) est une règle qui associe à tout réel x au plus un réel, qu'on appelle son image et qu'on note $f(x)$. L'ensemble des réels x dont l'image $f(x)$ est bien définie est l'ensemble de définition de la fonction et se note D_f .

La notion d'application que nous allons étudier est une notion voisine, tellement voisine qu'on utilisera souvent les termes "fonction" et "application" de manière interchangeable. Il y a toutefois deux différences :

a) la première est qu'une application n'est pas définie uniquement par une règle de calcul mais aussi par un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée. Pour tout x dans l'ensemble de départ, $f(x)$ doit être bien définie et appartenir à l'ensemble d'arrivée, mais il n'y a pas d'autres conditions. En particulier, l'ensemble de départ peut-être strictement plus petit que l'ensemble de définition.

La raison pour laquelle on s'intéresse aux ensembles de départ et d'arrivée est que pour une même règle de calcul $x \mapsto f(x)$, changer les ensembles de départ et d'arrivée peut changer les propriétés de l'application. Nous verrons par exemple que l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à x associe x^2 est croissante et bijective, alors qu'avec la même règle de calcul, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^2 n'est ni croissante ni bijective.

b) la deuxième différence est qu'une application n'associe pas forcément un réel à un réel, mais un élément d'un ensemble F à un élément d'un ensemble E , où E et F sont des ensembles quelconques. Par exemple, on peut considérer l'application qui va de l'ensemble des étudiants de Dauphine dans l'ensemble des lettres de l'alphabet, et qui à un étudiant associe la première lettre de son prénom. Autre exemple : notons $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On peut considérer l'application qui va de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, et qui à une application f associe sa valeur en 0.

Il est temps de donner des définitions précises.

2 Généralités

Notations : dans tout le chapitre, E , F , G et H désignent des ensembles.

Définition. Une *application* f est la donnée d'un *ensemble de départ*, d'un *ensemble d'arrivée*, et d'une *règle de calcul* qui associe à tout élément x de l'ensemble de départ un élément de l'ensemble d'arrivée, noté $f(x)$ et appelé image de x par f . La règle de calcul est notée $x \mapsto f(x)$.

Pour se donner une application f d'un ensemble de départ E vers un ensemble d'arrivée F , on écrit : "soit $f : E \rightarrow F$ une application". Supposons qu'on veuille de plus préciser la règle $x \mapsto f(x)$, par exemple qu'on veuille se donner l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^2 . On écrira alors : "soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à tout réel x associe x^2 ", ou encore : soit l'application

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

L'ensemble des applications de E dans F se note $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E .

Egalité de deux applications. Les ensembles de départ et d'arrivée font partie de la définition d'une application. De ce fait, si E , E' , F , F' sont des ensembles, deux applications $f : E \rightarrow F$ et $g : E' \rightarrow F'$ sont égales si et seulement si elles ont même ensemble de départ ($E = E'$), même ensemble d'arrivée ($F = F'$) et même règle de calcul ($f(x) = g(x)$ pour tout x dans E).

Exemple 1. Soient f_1 , f_2 , f_3 , f_4 les applications suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} f_1 : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} & f_2 : \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} & f_3 : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ & f_4 : \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 & x & \mapsto & x^2 & x & \mapsto & x^2 & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Bien qu'elles aient en commun la règle de calcul $x \mapsto x^2$, ces applications sont toutes différentes. Par exemple, f_1 et f_2 sont différentes car elles n'ont pas le même ensemble de départ ; f_1 et f_3 sont différentes, car elles n'ont pas le même ensemble d'arrivée. Ces applications n'ont d'ailleurs pas les mêmes propriétés. Par exemple, f_2 et f_4 sont croissantes, alors que f_1 et f_3 ne le sont pas.

Remarques. Il faut distinguer l'ensemble de définition de la règle de calcul et l'ensemble de départ de l'application. L'ensemble de définition de la règle de calcul $x \mapsto x^2$ est $\mathbb{R}$ tout entier, mais on peut très bien prendre un ensemble de départ plus petit, comme pour f_2 et f_4 . D'autre part, il faut distinguer l'ensemble des réels qui s'écrivent sous la forme $f(x)$ et l'ensemble d'arrivée. Il peut y avoir dans l'ensemble d'arrivée des éléments qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme $f(x)$, c'est à dire qui ne sont l'image d'aucun élément de l'ensemble de départ : c'est le cas pour f_1 et f_2 , car leur ensemble d'arrivée contient des réels strictement négatifs, et aucun réel strictement négatif ne peut s'écrire sous la forme x^2 .

Insistons : on note souvent y un élément générique de l'ensemble d'arrivée. D'autre part, vous aviez l'habitude de vous donner une fonction en écrivant "soit la fonction $y = f(x)$ ". Du coup, certains étudiants font la confusion et ont l'impression qu'un élément de l'ensemble d'arrivée peut toujours s'écrire sous la forme $f(x)$. Ce n'est pas le cas.

Applications bien définies : pour qu'une application f de E dans F soit bien définie, il faut que pour tout élément x de E , $f(x)$ soit bien définie et soit dans F . Tant que ces conditions sont satisfaites, on peut très bien prendre comme ensembles de départ et d'arrivée des ensembles peu naturels.

Exemple. Soient f , g et h les " applications " suivantes :

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/x \end{array} \quad \begin{array}{lll} g : \mathbb{R}^* & \rightarrow &]0, +\infty[\\ x & \mapsto & 1/x \end{array} \quad \begin{array}{lll} h : [1, 2] & \rightarrow & [0, 5] \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

L'application f est mal définie car 0 appartient à l'ensemble de départ, mais $f(0)$ n'est pas défini. L'application g est mal définie car, par exemple, -2 appartient à l'ensemble de départ, mais $1/(-2)$ n'appartient pas à l'ensemble d'arrivée. En revanche, h est bien définie, bien que ses ensembles de départ et d'arrivée ne soient pas particulièrement naturels. Rassurez-vous : en pratique, on ne fera pas exprès de prendre des ensembles de départ et d'arrivée bizarres, on ne le fera que quand ce sera utile.

Graphe : Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Le graphe de f est l'ensemble des couples $(x, f(x))$, c'est une partie de $E \times F$. Quand E et F sont des parties de $\mathbb{R}$, on peut "dessiner" le graphe de l'application comme vous le faisiez en terminale. Abusivement, on appelle aussi "graphe" le dessin du graphe.

Composition : soient E , F , F' et G des ensembles. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F' \rightarrow G$ des applications. Si $F = F'$, ou plus généralement, si $F \subset F'$, on peut définir la composée de f et g , notée $g \circ f$ (" g rond f "). C'est l'application de E dans G telle que $g \circ f(x) = g(f(x))$ pour tout x dans E .

Exemple. Soient

$$\begin{array}{lll} f :]2, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lll} g : \mathbb{R} \setminus \{5\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x-5} \end{array}$$

Pour tout x dans $]2, +\infty[$, $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$. On peut donc définir $g \circ f$ et on a, pour tout x dans $]2, +\infty[$:

$$g \circ f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1) - 5} = \frac{1}{x^2 - 4}$$

Proposition 1 Soient $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$, et $h : G \rightarrow H$ des applications. On a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (on dit que la composition des applications est une opération associative).

Preuve. Les applications $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ sont toutes deux égales à l'application de E dans H qui à x associe $h(g(f(x)))$. ■

Application identité : soit E un ensemble. On note Id_E et on appelle application identité de E l'application :

$$\begin{array}{ccc} Id_E : & E & \rightarrow E \\ & x & \mapsto x \end{array}$$

Proposition 2 Pour toute application $f : E \rightarrow F$, on a $Id_F \circ f = f = f \circ Id_E$.

Preuve. Ces trois applications vont de E dans F . De plus, pour tout x dans E , $Id_F \circ f(x) = Id_F(f(x)) = f(x)$ et $f \circ Id_E(x) = f(Id_E(x)) = f(x)$. ■

3 Antécédents, image directe, image réciproque

Antécédents : soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soient $x \in E$ et $z \in F$. Si z est l'image de x par f (i.e. $f(x) = z$), on dit que x est un antécédent de z par f .

Un élément de l'ensemble de départ a exactement une image. En revanche, un élément de l'ensemble d'arrivée peut avoir 0, 1 ou plusieurs antécédents.

Exemple. Soit $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe x^2 . Le réel -1 n'a pas d'antécédents par f_1 , 0 en a exactement un (lui-même), et 3 en a deux : $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$. Soit $f_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe x^2 . Le réel 3 a un unique antécédent par $f_2 : \sqrt{3}$, car $-\sqrt{3}$ n'appartient pas à l'ensemble de départ de f_2 .

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe $g(x) = \sin x$. Les réels n'appartenant pas à l'intervalle $[-1, 1]$ n'ont pas d'antécédents par g . Les réels appartenant à $[-1, 1]$ en ont une infinité.

Remarque : dans le cas des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'image et les antécédents d'un réel se lisent facilement sur le graphe.

Image directe et image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$.

L'image (directe) de A par f est la partie de F formée des images de tous les éléments de A . On la note $f(A)$. On a donc :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\}$$

Par exemple, si $A = \{a, b, c\}$, $f(A) = \{f(a), f(b), f(c)\}$.

L'image réciproque de B par f est l'ensemble des éléments de E dont l'image est dans B . En d'autres termes, c'est l'ensemble des antécédents des éléments de B . On la note $f^{-1}(B)$. On a donc

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\} = \{x \in E, \exists z \in B, f(x) = z\}$$

Le tableau suivant donne des exemples d'images directes par les applications $f_1, \dots, f_4$ de l'exemple 1. Pour mémoire, ces applications ont toutes la règle de calcul $x \mapsto x^2$ mais diffèrent par leurs ensembles de départ et d'arrivée. Ces derniers sont rappelés sur la première ligne du tableau. "ND" veut dire "Non défini".

	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$
A	$f_1(A)$	$f_2(A)$	$f_3(A)$	$f_4(A)$
$\{2\}$	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$
$\{-2, 2\}$	$\{4\}$	ND	$\{4\}$	ND
$[-1, 3]$	$[0, 9]$	ND	$[0, 9]$	ND
$[-1, 0] \cup [1, 3]$	$[0, 9]$	ND	$[0, 9]$	ND
$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	ND	$\mathbb{R}_+$	ND

La raison pour laquelle, par exemple, $f_2(\mathbb{R})$ n'est pas défini, est que $\mathbb{R}$ n'est pas inclus dans l'ensemble de départ de f_2 .

Le tableau suivant donne des exemples d'images réciproques pour les mêmes applications. On remarquera que l'image réciproque d'un ensemble non vide peut être vide.

	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$
B	$f_1^{-1}(B)$	$f_2^{-1}(B)$	$f_3^{-1}(B)$	$f_4^{-1}(B)$
$\{2\}$	$\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$	$\{\sqrt{2}\}$	$\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$	$\{\sqrt{2}\}$
$\{-1, 2\}$	$\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$	$\{\sqrt{2}\}$	ND	ND
$[0, 3]$	$[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$	$[0, \sqrt{3}]$	$[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$	$[0, \sqrt{3}]$
$[-1, 3]$	$[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$	$[0, \sqrt{3}]$	ND	ND
$[-1, 0] \cup [1, 3]$	$\{0\} \cup [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$	$\{0\} \cup [1, \sqrt{3}]$	ND	ND
$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$
$\mathbb{R}_-^*$	$\emptyset$	$\emptyset$	ND	ND
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	ND	ND

La raison pour laquelle, par exemple, l'image réciproque de $\mathbb{R}$ par f_3 n'est pas définie est que $\mathbb{R}$ n'est pas inclus dans l'ensemble d'arrivée de f_3 .

Proposition 3 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soient A et A' des parties de E , et B et B' des parties de F . Si $A \subset A'$ alors $f(A) \subset f(A')$. Si $B \subset B'$, alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

Preuve. Laissée au lecteur. ■

Proposition 4 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soient A et A' des parties de E , et B et B' des parties de F . Alors :

- 1) $A \subset f^{-1}(f(A))$
- 2) $f(f^{-1}(B)) \subset B$
- 3) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$
- 4) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$
- 5) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$
- 6) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

7) En général, les réciproques du 1), du 2) et du 4) sont fausses.

Preuve. 1) Soit $x \in A$. Posons $B = f(A)$. On a $f(x) \in B$ donc $x \in f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A))$.

2) Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Posons $A = f^{-1}(B)$. On a $y \in f(A)$, donc il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Comme $x \in A = f^{-1}(B)$, on a $f(x) \in B$. Donc $y \in B$. Donc $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

3) Par double inclusion. Montrons tout d'abord $f(A \cup A') \subset f(A) \cup f(A')$. Soit $y \in f(A \cup A')$. Il existe $x \in A \cup A'$ tel que $f(x) = y$. Comme $x \in A \cup A'$, on a $x \in A$ ou $x \in A'$. Si $x \in A$, $f(x) \in f(A)$ donc $y \in f(A)$ donc $y \in f(A) \cup f(A')$. Sinon, $x \in A'$, et de même $y \in f(A) \cup f(A')$. Donc $f(A \cup A') \subset f(A) \cup f(A')$. Montrons maintenant $f(A) \cup f(A') \subset f(A \cup A')$. On a $A \subset A \cup A'$ donc $f(A) \subset f(A \cup A')$ d'après la proposition 4. De même, $f(A') \subset f(A \cup A')$. Donc $f(A) \cup f(A') \subset f(A \cup A')$, et par double inclusion on a l'égalité.

4) $A \cap A' \subset A$ donc $f(A \cap A') \subset f(A)$. De même $f(A \cap A') \subset f(A')$, donc $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.

5) Soit $x \in E$. On a : $x \in f^{-1}(B \cup B')$ ssi $f(x) \in B \cup B'$ donc ssi $(f(x) \in B \text{ ou } f(x) \in B')$, donc ssi $(x \in f^{-1}(B) \text{ ou } x \in f^{-1}(B'))$, donc ssi $x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$. Donc $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.

6) Identique à la preuve du 5) en remplaçant $\cup$ par $\cap$, et "ou" par "et".

7) Pour voir que les réciproques du 1), du 2) et du 4) sont fausses, considérons l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe x^2 . Posons $A = B = \mathbb{R}_-$ et $A' = \mathbb{R}_+$. On a $f(A) = \mathbb{R}_+$, donc $f^{-1}(f(A)) = \mathbb{R} \neq A$. Donc la réciproque du 1) est fausse. On a $f^{-1}(B) = \{0\}$, donc $f(f^{-1}(B)) = \{0\} \neq B$, donc la réciproque du 2) est fausse. Enfin, $f(A') = \mathbb{R}_+ = f(A)$, donc $f(A) \cap f(A') = \mathbb{R}_+$, mais $A \cap A' = \{0\}$, donc $f(A \cap A') = \{0\} \neq f(A) \cap f(A')$. Donc la réciproque du 4) est fausse. ■

4 Applications injectives, surjectives, bijectives

Définition. Soit f une application.

- ◊ f est *injective* si tout élément de l'ensemble d'arrivée a *au plus* un antécédent par f .
- ◊ f est *surjective* si tout élément de l'ensemble d'arrivée a *au moins* un antécédent.
- ◊ f est *bijective* si tout élément de l'ensemble d'arrivée a *un unique* antécédent.

Cette définition peut se reformuler ainsi : f est injective (respectivement surjective ; bijective) si pour tout z dans F , l'équation $f(x) = z$ a au plus une solution dans E (respectivement au moins une solution ; exactement une solution). Une application injective (respectivement surjective, bijective) est aussi appelée une injection (respectivement surjection, bijection).

Exemples. Soient $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $f_4 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui à x associent x^2 . L'application f_1 n'est ni injective ni surjective ; f_2 est injective mais pas surjective ; f_3 est surjective mais pas injective ; f_4 est bijective.

Soit E un ensemble. L'application identité de E est bijective (prouvez-le!).

Proposition 5 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) f est injective.
- 2) Pour tous x et x' dans E , si $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$.
- 3) Pour tous x et x' dans E , si $x \neq x'$, alors $f(x) \neq f(x')$.

Preuve. . Faisons une preuve cyclique. 1) $\Rightarrow$ 2) : Supposons f injective. Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$. Soit $z = f(x)$. Si $x \neq x'$, z a au moins deux antécédents distincts, ce qui est impossible car f est injective. Donc $x = x'$ et 2) est vérifié.

2) $\Rightarrow$ 3) : évident car une implication et sa contraposée sont équivalentes.

3) $\Rightarrow$ 1) : soit z dans F . Si z a deux antécédents distincts x et x' alors $x \neq x'$ mais $f(x) = z = f(x')$, ce qui contredit 3). Donc z a au plus un antécédent, donc f est injective. ■

Proposition 6 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Preuve. $f(E)$ est l'ensemble des images des éléments de E . C'est donc l'ensemble des éléments de F qui ont au moins un antécédent. Donc $f(E) = F$ ssi tout élément de F a au moins un antécédent par f , c'est à dire ssi f est surjective. ■

Proposition 7 Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ des applications. On a :

- 1) si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- 2) si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- 3) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- 4) si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
- 5) Les réciproques sont toutes fausses.

Preuve. 1) Supposons f et g injectives. Soient x et x' dans E tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. On a $g(f(x)) = g(f(x'))$ donc par injectivité de g , $f(x) = f(x')$, donc par injectivité de f , $x = x'$. L'application $g \circ f$ est donc bien injective.

2) Supposons f et g surjectives. Soit $z \in G$. Comme g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. De plus, comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a donc $z = g(f(x)) = g \circ f(x)$, donc z a au moins un antécédent par $g \circ f$. Donc $g \circ f$ est bien surjective.

3) Supposons $g \circ f$ injective. Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$. On a donc $g(f(x)) = g(f(x'))$, donc par injectivité de $g \circ f$, $x = x'$. Donc f est injective. On peut aussi faire une preuve par contraposée : si f n'est pas injective il existe $x \neq x'$ dans E tels que $f(x) = f(x')$. Mais alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, donc $g \circ f$ n'est pas injective.

4) Supposons $g \circ f$ surjective. Soit $z \in G$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe x dans E tel que $z = g \circ f(x)$. Posons $y = f(x)$ (c'est à dire : appelons y l'image de x par f). On a $y \in F$ et $z = g(y)$, donc z a au moins un antécédent par g , donc g est surjective.

5) Montrons que les réciproques de 1) et 2) sont fausses : soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui à tout entier naturel n associe $n + 1$. Soit $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui à tout entier naturel n associe $n - 1$ si $n \neq 0$ et qui à 0 associe 0. Pour tout entier naturel n , on a $g \circ f(n) = g(n + 1) = (n + 1) - 1 = n$ (on a utilisé $n + 1 \neq 0$ pour calculer $g(n + 1)$). On a donc $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$. L'application $g \circ f$ est donc bijective, donc injective et surjective. Pourtant f n'est pas surjective (car 0 n'a pas d'antécédents par f) et g n'est pas injective (car 0 a deux antécédents par g : 1 et 0).

Montrons maintenant que les réciproques de 3) et de 4) sont fausses. Soient $f = Id_{\mathbb{R}}$ et g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe 0. L'application g est donc constante. Pour tout réel x , $g \circ f(x) = g(x) = 0$. L'application $g \circ f$ n'est donc pas injective, bien que f le soit. Le lecteur vérifiera que, de même, l'application $f \circ g$ n'est pas surjective, bien que f le soit. ■

5 Application réciproque d'une application bijective

Soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective, c'est à dire que chaque élément de F a exactement un antécédent dans E . On appelle application réciproque de f l'application $g : F \rightarrow E$ telle que pour tout y dans F , $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f . On la note f^{-1} .

Proposition 8 Soit $f : E \rightarrow F$. Si f est bijective, alors pour tout x dans E et tout y dans F , $(y = f(x)) \Leftrightarrow (x = f^{-1}(y))$.

Preuve. Soit $x \in E$ et $y \in F$. Si $y = f(x)$ alors x est un antécédent de y . Mais $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f , donc $f^{-1}(y) = x$. Réciproquement, si $x = f^{-1}(y)$, alors x est l'unique antécédent de y par f ; en particulier, x est un antécédent de y , donc $f(x) = y$. ■

Proposition 9 Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- 1) si f est bijective, alors $f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$.
- 2) S'il existe une application g de F vers E telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$, alors f est bijective et $g = f^{-1}$.
- 3) si f est bijective, alors sa réciproque f^{-1} aussi et $(f^{-1})^{-1} = f$.
- 4) Soit $g : F \rightarrow G$. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Preuve. 1) Supposons f bijective. Soit $x \in E$. Posons $y = f(x)$. D'après la proposition 8, $f^{-1}(y) = x$ donc $f^{-1}(f(x)) = x$, donc $f^{-1} \circ f = Id_E$. Le lecteur vérifiera que, de même, $f \circ f^{-1} = Id_F$.

2) Supposons $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. On a donc $g \circ f$ et $f \circ g$ bijectives. En particulier, $g \circ f$ est injective, donc f est injective d'après le point 3) de la proposition 7. De même, $f \circ g$ est surjective, donc f est surjective. L'application f est donc bijective, donc sa réciproque f^{-1} existe et d'après 1), $f^{-1} \circ f = Id_E$. En composant l'égalité $f \circ g = Id_F$ par f^{-1} , on obtient $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ Id_F = f^{-1}$, donc $g = Id_F \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1}$.

3) Supposons f bijective. Pour mieux comprendre la façon dont nous allons utiliser le 2), posons $\tilde{f} = g^{-1}$, $\tilde{g} = f^{-1}$, $\tilde{E} = F$ et $\tilde{F} = E$. On a d'après le 1), $\tilde{g} \circ \tilde{f} = Id_{\tilde{E}}$ et $\tilde{f} \circ \tilde{g} = Id_{\tilde{F}}$. D'après le 2), on a donc $\tilde{f}$ bijective et $\tilde{f}^{-1} = \tilde{g}$, c'est à dire f^{-1} bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

4) Supposons f et g bijectives. Leur réciproques f^{-1} et g^{-1} existent donc. De plus, $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ Id_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = Id_G$. De même, $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = Id_E$, donc d'après le 2), $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

On utilise souvent le 2) sous la forme suivante, dont la preuve est laissée au lecteur :

Proposition 10 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Supposons qu'il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que, pour tout x dans E et tout y dans F , $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$. Alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

Cohérence des notations.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soit $B \subset F$. Que f soit bijective ou non, on note $f^{-1}(B)$ l'image réciproque de B par f . D'autre part, quand f est bijective, f^{-1} désigne son application réciproque, et on note donc aussi $f^{-1}(B)$ l'image directe de B par l'application réciproque de f . Il y a donc a priori un problème car on désigne par une même notation deux objets a priori différents. La proposition suivante montre qu'il n'en est rien, car quand f est bijective, l'image réciproque de B par f coïncide avec l'image de B par la réciproque de f . Il n'est donc pas gênant de les noter de la même façon.

Proposition 11 Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ des applications. Soit $B \subset F$. Soient $A = \{x \in E, f(x) \in B\}$ et $A' = \{g(y), y \in B\}$. L'ensemble A est l'image réciproque de B par f , et A' est l'image (directe) de B par g . On a : si f est bijective et g est sa réciproque, alors $A = A'$.

Preuve. Supposons que f soit bijective et que g soit sa réciproque. Montrons que $A = A'$ par double inclusion. Si $x \in A$, alors $f(x) \in B$, donc $g(f(x)) \in g(B) = A'$, mais $g(f(x)) = x$, donc $x \in A'$, donc $A \subset A'$. Réciproquement, si $x \in A'$, alors il existe $y \in B$ tel que $x = g(y)$. On a $f(x) = f(g(y)) = y$, donc $f(x) \in B$, donc $x \in A$, donc $A' \subset A$ et par double inclusion $A = A'$. ■

Attention : si f n'est pas bijective, son application réciproque n'existe pas. La notation $f^{-1}(B)$ ne désigne alors pas l'image de B par l'application f^{-1} (puisque cette application n'existe pas!), mais uniquement l'image réciproque de B par f . En particulier, ce n'est pas parce que la notation $f^{-1}(B)$ apparaît dans un énoncé qu'on a supposé que f était bijective.

6 Prolongements et restrictions

Définition. Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soit $A \subset E$ et $B \subset F$ tel que $f(A) \subset B$. On appelle restriction de f à A comme ensemble de départ et B comme ensemble d'arrivée, et on note $f|_{A \rightarrow B}$, l'application de A dans B qui à tout x dans A associe $f(x)$. Cette application a la même règle de calcul que f , seuls changent les ensembles de départ et d'arrivée.

Notation : quand on restreint uniquement l'ensemble de départ ($B = F$: cas courant), on utilise aussi la notation $f|_A$ pour $f|_{A \rightarrow F}$.

Définition. Soient f et g des applications. On dit que f est un prolongement de g si g est une restriction de f .

Exemples.

1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe x^2 . Soit $g = f|_{\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+}$, c'est à dire soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui à x associe x^2 . L'application g est une restriction de f . Elle a l'avantage d'être croissante et bijective, alors que f ne l'est pas.

2) Soit $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe $(\sin x)/x$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe $(\sin x)/x$ si $x \neq 0$, et qui à 0 associe 1. L'application f est un prolongement de g (on a $g = f|_{\mathbb{R}^*}$). De plus, on peut montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. On dit que f est le prolongement par continuité de g . L'avantage de considérer f plutôt que g est qu'on peut appliquer à f les théorèmes sur les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tout entier (par exemple, avec f on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires sur un intervalle contenant 0, alors qu'on ne pourrait pas avec g).

La proposition suivante est évidente quand on voit ce qu'elle signifie sur des "patates" :

Proposition 12 Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- a) La restriction de f à E comme ensemble de départ et $f(E)$ comme ensemble d'arrivée est surjective.
- b) Si f est injective, toutes ses restrictions le sont.
- c) Si f est injective, la restriction de f à E comme ensemble de départ et $f(E)$ comme ensemble d'arrivée est bijective (on dit que f induit une bijection de E sur $f(E)$).

Preuve. a) Notons g cette restriction ($g = f|_{E \rightarrow f(E)}$). Soit $y \in f(E)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Mais $g(x) = f(x)$. Donc $g(x) = y$ et y a au moins un antécédent par g . Ceci est vrai pour tout y dans $f(E)$, donc pour tout y dans l'ensemble d'arrivée de g , donc g est surjective.

b) Supposons f injective. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$ tels que $f(A) \subset B$. Soit g la restriction de f à A comme ensemble de départ et B comme ensemble d'arrivée. Soient x et x' dans A . Si $g(x) = g(x')$ alors $f(x) = f(x')$ par définition de g , donc $x = x'$ par injectivité de f . Donc g est injective.

c) Conséquence directe de a) et b). ■

7 Quelques propriétés évidentes

Soient E, F, G des ensembles. Soient $A \subset E, A' \subset E, B \subset F, B' \subset F$, et $C \subset G$. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Les applications f et g ne sont pas supposées bijectives. De ce fait, quand elle intervient, la notation $f^{-1}(B)$ désigne uniquement l'image réciproque de B par f . Outre celles qui figurent dans le cours, vous pouvez utiliser directement les propriétés suivantes :

- 1) Si $A \subset A'$ alors $f(A) \subset f(A')$. Réciproque fausse (vraie quand f est injective).
- 2) Si $B \subset B'$ alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$. Réciproque fausse (vraie quand f est surjective).
- 3) $f(E) \subset F$ (avec égalité ssi f est surjective); 4) $f^{-1}(F) = E$; 5) $f^{-1}(f(E)) = E$.
- 6) $(g \circ f)(A) = g(f(A))$; 7) $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$

Exercice 13 *Démontrer ces propriétés.*

8 Des applications exotiques

Jusqu'à présent nous avons surtout considéré des applications d'une partie de $\mathbb{R}$ dans une partie de $\mathbb{R}$. Toutefois, il existe bien d'autres types d'applications utiles en mathématiques. En voici quelques-unes :

1a) l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui au couple (x, y) associe $f((x, y)) = x + y$. Elle porte un joli nom : l'addition sur $\mathbb{R}$.

1b) l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui au couple (x, y) associe $f((x, y)) = xy$. Elle aussi a un joli petit nom : la multiplication sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 *Quelle application correspond à la division sur $\mathbb{R}$? (attention, on ne peut diviser que par un réel non nul).*

2) Notons $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Notons $C^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables un nombre infini de fois.

2a) l'application de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui à une application f associe $f(0)$.

2b) l'application de $C^\infty(\mathbb{R})$ dans $C^\infty(\mathbb{R})$ qui à une application f associe sa dérivée f' .

2c) l'application de $C^\infty(\mathbb{R})$ dans $C^\infty(\mathbb{R})$ qui à une application f associe sa primitive nulle en 0 (c'est à dire l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\int_0^x f(t)dt$).

3) l'application qui va de l'ensemble des personnes ayant un numéro de sécurité sociale en France au 1er janvier 2009 dans $\mathbb{N}$ et qui à une personne associe son numéro de sécurité sociale.

Et tant d'autres applications à découvrir...

Au fait, parmi les applications définies ci-dessus, lesquelles sont injectives ? surjectives ? bijectives ?