Chapitre 4 : Ensembles finis et infinis

1 Ensembles finis

Les notions que nous cherchons à formaliser dans la première partie de ce chapitre sont très simples, et les résultats très intuitifs. Les preuves rigoureuses de ces résultats sont toutefois parfois un peu indigestes, et vous ne comprenez pas bien pourquoi on se casse la tête à démontrer des choses qui semblent évidentes. C'et pourquoi nous admettrons certains résultats, tout en invitant les lecteurs avides de rigueur à consulter, par exemple, le chapitre "ensembles finis" du livre Algèbre 1 de Liret et Martinais, chez Dunod.

Intuitivement, le fait qu'un ensemble ait n éléments signifie qu'on peut compter ses éléments, en attribuant au premier élément de l'ensemble le numéro 1, au deuxième le numéro 2, etc., jusqu'à attribuer au dernier élément le numéro n. Ce faisant[1], on établit implicitement une bijection entre cet ensemble et $\{1, 2, ..., n\}$. Cela justifie la définition suivante.

Définition 1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un ensemble E a n éléments, ou est de cardinal n, s'il existe une bijection de E dans $\{1, 2, ..., n\}$. On note alors $Card\ E = n$.*

On peut réinterpréter cette définition ainsi : pour $n \in \mathbb{N}^*$, un ensemble E a n éléments si l'on peut écrire E sous la forme $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, où les x_i sont deux à deux distincts. La définition 1 et sa réinterprétation correspondent à ce que signifie intuitivement avoir n éléments. Elles ont en plus l'avantage d'être précises, et donc de nous permettre de raisonner proprement.

La définition suivante complète la définition 1.

Définition 2 *L'ensemble vide a 0 éléments. Un ensemble est fini s'il a n éléments pour un certain entier naturel n.*

A priori, la définition 1 n'interdit pas qu'un ensemble ait à la fois 10 et 15 éléments, ce qui serait ennuyeux. La proposition ci-dessous montre que ce n'est pas possible.

Proposition 3 *Soit E un ensemble, et n et p des entiers naturels. S'il existe une bijection de E dans $\{1, 2, ..., n\}$ et une bijection de E dans $\{1, 2, ..., p\}$ alors $n = p$. Le cardinal d'un ensemble fini est donc défini de manière unique.*

Pour démontrer la proposition 3, nous avons besoin des résultats suivants :

Proposition 4 *a) Soit E un ensemble fini. Si $A \subset E$, alors A est fini et $Card\, A \leq Card\, E$. De plus, $Card\, A = Card\, E$ si et seulement si $A = E$.*

b) Soient n et p des entiers naturels. S'il existe une injection de $\{1, 2, ..., n\}$ dans $\{1, 2, ..., p\}$ alors $n \leq p$.

Preuve. Le point a) est très intuitif mais sa preuve rigoureuse un peu lourde, donc nous l'admettrons. Voici la preuve du b) : supposons qu'il existe une injection f de $\{1, 2, ..., n\}$ dans $\{1, 2, ..., p\}$. Posons $A = \{f(1), f(2), ..., f(n)\}$ et $B = \{1, 2, ..., p\}$. L'ensemble A a n éléments (car f étant injective, les éléments $f(1)$, $f(2)$,...,$f(n)$ sont tous distincts). De plus A est inclus dans B. Donc d'après le a), $Card\, A \leq Card\, B$, donc $n \leq p$. [2] ■

Nous pouvons maintenant prouver la proposition 3 : supposons qu'il existe des applications $f : E \to \{1, 2, ..., n\}$ et $g : E \to \{1, 2, ..., p\}$ bijectives. Alors l'application $g \circ f^{-1}$ est une bijection, et en particulier une injection, de $\{1, 2, ..., n\}$ dans $\{1, 2, ..., p\}$. Donc d'après le point b) de la proposition 4, $n \leq p$. On obtient de même $p \leq n$, et donc finalement $n = p$. ■

---

[1] Il n'y a pas forcément un élément qui se distingue comme étant "le premier", donc on a en fait en tête le processus suivant : on choisit un élément de l'ensemble et on lui attribue le numéro 1, puis on choisit un élément qui n'a pas encore de numéro, et on lui attribue le numéro 2, etc. jusqu'à ce que tous les éléments de l'ensemble soient numérotés.

[2] En fait, la vraie preuve de des résultats consiste à prouver d'abord le b) par récurrence sur p, puis à déduire le a) du b). Voir le livre de Liret et Martinais.

Proposition 5 *Soient E et F des ensembles, et $f : E \to F$. Si E est fini, alors l'ensemble $f(E)$ est fini. De plus, $Card\, f(E) \leq Card\, E$, avec égalité si et seulement si f est injective.*

Preuve. Si E est vide, le résultat est évident. Si E est de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, alors on peut l'écrire sous la forme $E = \{x_1, ..., x_n\}$, où les x_i sont deux à deux distincts. En notant $y_i = f(x_i)$ on a donc $f(E) = \{y_1, ..., y_n\}$. Si f est injective, alors les y_i sont deux à deux distincts, donc $f(E)$ a n éléments et $Card\, f(E) = Card\, E$. Si f n'est pas injective, alors certains des y_i sont égaux. Donc, intuitivement, et nous admettrons qu'on peut rendre cette intuition rigoureuse, $f(E)$ a strictement moins que n éléments. Donc $Card\, f(E) < Card\, E$. ■

Proposition 6 *Soient E et F des ensembles non vides, tels que E est fini.*
a) (Il existe une bijection de E dans F) si et seulement si (F est fini et $Card\, F = Card\, E$).
b) Si F est fini, alors il existe une injection de E dans F si et seulement si $Card\, E \leq Card\, F$.

Preuve. Preuve du a) Soit $n = Card\, E$. Par définition, il existe une bijection f de E dans $\{1, 2, ..., n\}$. S'il existe une bijection $g : E \to F$ alors $f \circ g^{-1}$ est une bijection de F dans $\{1, 2, ..., n\}$, donc F est fini et a n éléments. Réciproquement, si F a n éléments, alors par définition il existe une bijection h de F dans $\{1, 2, ..., n\}$, et $h^{-1} \circ f$ est une bijection de E dans F.

Preuve du b) : s'il existe une injection $f : E \to F$, alors on a $Card\, E = Card\, f(E)$ d'après la proposition 5. De plus, $f(E) \subset F$, donc $Card\, f(E) \leq Card\, F$ d'après la proposition 4, point a). Donc $Card\, E \leq Card\, F$. Réciproquement, soient $n = Card\, E$ et $p = Card\, F$. Par définition, il existe une bijection de f de E dans $\{1, 2, ..., n\}$ et une bijection g de F dans $\{1, 2, ..., p\}$. De plus, si $n \leq p$, l'application h de $\{1, 2, ..., n\}$ dans $\{1, 2, ..., p\}$ telle que, pour tout k dans $\{1, 2, ..., n\}$, $h(k) = k$, est bien définie et injective. L'application $g^{-1} \circ h \circ f$ est donc une injection de E dans F, car composée d'injections. Une telle injection existe donc. ■

Proposition 7 *Soit E et F des ensembles finis. Soit $f : E \to F$. Si $Card\, E = Card\, F$ (et en particulier si $E = F$) alors : f injective $\Leftrightarrow$ f bijective $\Leftrightarrow$ f surjective.*

Preuve. Faisons une preuve cyclique. Si f est injective, alors $Card\, f(E) = Card\, E$ d'après la proposition 5. Or $Card\, E = Card\, F$ par hypothèse. Donc $Card\, f(E) = Card\, F$. Or $f(E) \subset F$, donc $f(E) = F$ d'après la proposition 4, point a), donc f est surjective, donc bijective. Si f est bijective, alors f est évidemment surjective. Enfin, si f est surjective, $f(E) = F$, donc $Card\, f(E) = Card\, F = Card\, E$, donc f est injective d'après la proposition 5. ■

2 Ensembles infinis

Définition 8 *Un ensemble est infini s'il n'est pas fini.*

Rappelons qu'une partie A d'un ensemble E est un sous-ensemble strict de E si $A \subset E$ et $A \neq E$ (on note parfois $A \subsetneq E$). Nous avons admis (et nous aurions pu prouver) que si E est un ensemble fini, et A un sous-ensemble strict de E, alors A a strictement moins d'éléments que E. Ceci se traduit par la propriété suivante :

Proposition 9 *Soit E un ensemble fini. Si A est un sous-ensemble strict de E, il n'y a pas d'injection de E dans A.*

Preuve. Par contraposée : soit $A \subset E$. S'il existe une injection $f : E \to A$ alors $Card\, E \leq Card\, A \leq Card\, E$, respectivement d'après la proposition 6, point b), et parce que $A \subset E$. Donc $A = E$ d'après la proposition 4, point a). ■

En particulier, un ensemble fini ne peut pas être mis en bijection avec une de ses parties strictes. Curieusement, cette propriété ne se généralise pas aux ensembles infinis. C'est même une des manières de montrer qu'un ensemble est infini.

Proposition 10 $\mathbb{N}$ *est infini.*

Preuve. $\mathbb{N}^*$ est un sous-ensemble strict de $\mathbb{N}$. Pourtant, l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ qui à n associe $n+1$ est bijective, donc injective. ■

Définition 11 *Un ensemble infini E est dénombrable s'il peut-être mis en bijection avec $\mathbb{N}$, i.e., s'il existe une application bijective de E dans $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{N}$ dans E).*

Définition 12 *Un ensemble est au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.*

Remarque : certains auteurs utilisent un vocabulaire différent, et appellent "dénombrables" les ensembles que nous avons appelés "au plus dénombrables".

Proposition 13 *1) Un ensemble inclus dans un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.*
2) Soient E et F des ensembles. Si E est dénombrable et F en bijection avec E, alors E est dénombrable.

Preuve. Le 1) est admis (résultat très intuitif, mais preuve un peu lourde). La preuve du 2) est laissée au lecteur. ■

Proposition 14 *$\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.*

Preuve. Nous admettrons que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables (voir TD pour $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$). Voici la preuve que $\mathbb{Z}$ est dénombrable : soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ telle que pour tout entier naturel n, $f(2n) = n$ et $f(2n+1) = -n-1$. On a donc $f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f(2) = 1$, $f(3) = -2$, $f(4) = 2$, etc. Cette application est bijective (exercice). L'ensemble $\mathbb{Z}$ est donc dénombrable. ■

Commentaire : il y a plusieurs manières de comparer la "taille" d'ensembles. Une première façon est de les comparer au sens de l'inclusion. En ce sens, $\mathbb{Q}$ est plus gros que $\mathbb{Z}$, qui est plus gros que $\mathbb{N}$, qui est lui-même plus gros que l'ensemble des entiers pairs. En revanche, au sens des cardinaux, c'est à dire au sens où ils peuvent être mis en bijection, ces ensembles ont la même “taille". C'est surprenant, mais c'est comme ça. Ceci vu, de nombreuses questions se posent. En particulier, tous les ensembles infinis peuvent-ils être mis en bijection avec $\mathbb{N}$? La réponse est non : on peut montrer qu'il n'y a pas d'ensembles infinis plus petits que $\mathbb{N}$, mais il y a des ensembles plus gros. L'ensemble des réels, notamment, est vraiment plus gros que $\mathbb{N}$.

Proposition 15 *$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables.*

Preuve. Ces résultats sont admis et nous donnons juste l'idée. Le fait que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne soit pas dénombrable est une conséquence du résultat général suivant (voir TD) : il n'y a jamais de surjections d'un ensemble E dans l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(E)$. Ceci implique qu'il n'y a pas de surjections, donc de bijections, de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, donc que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable. Pour montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, l'idée est de montrer que $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ en utilisant le développement décimal des nombres réels. Ceci fait, il suit que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable car sinon $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ le serait. ■

Le résultat suivant est un outil puissant pour montrer qu'un ensemble est dénombrable.

Proposition 16 *Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. C'est à dire, si I est un ensemble d'indices dénombrable, et si pour tout i dans I, A_i est un ensemble dénombrable, alors $A = \cup_{i \in I} A_i$ est dénombrable.*

Preuve. (Hors programme) Nous donnons seulement la preuve dans le cas où les ensembles A_i sont deux à deux disjoints. L'idée est de montrer que A est en bijection avec $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Comme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, et qu'un ensemble en bijection avec un ensemble dénombrable l'est aussi, cela montrera que A est dénombrable. Par hypothèse, il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to I$ et pour tout i dans I, une bijection $g_i : \mathbb{N} \to A_i$. Montrons que l'application $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$ défini par $h(n,p) = g_{f(n)}(p)$ est bijective.

Surjectivité : soit $y \in A$. Il existe i dans I tel que $y \in A_i$. Soit $n = f^{-1}(i)$ et $p = g_i^{-1}(y)$. On a $h(n,p) = g_i(p) = y$, donc y a au moins un antécédent par h, donc h est surjective.

Injectivité : soient (n,p) et (n',p') dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $h(n,p) = h(n',p')$. On a $h(n,p) \in A_{f(n)}$ et $h(n',p') \in A_{f(n')}$. Or $h(n,p) = h(n',p')$, donc $A_{f(n)} \cap A_{f(n')} \neq \emptyset$. Comme les A_i sont deux à deux disjoints, on a donc $f(n) = f(n')$, et donc $n = n'$ par injectivité de f. Donc $h(n,p) = h(n,p')$, donc $g_n(p) = g_n(p')$, et donc $p = p'$ par injectivité de g_n. Donc $(n,p) = (n',p')$ et h est injective. ■

On peut montrer que la proposition 16 reste vraie si l'on remplace partout dénombrable par "au plus dénombrable". En particulier, l'union de deux ensembles dénombrables est dénombrable. Une conséquence est que l'ensemble des irrationnels $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable. En effet, comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, si $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ était dénombrable, alors $\mathbb{R}$ le serait aussi.

3 Compléments (hors programme)

Voici pour les esprits curieux quelques résultats et preuves complémentaires sur les cardinaux. Commençons par un résultat qui nous permettra de remplaçer si besoin l'hypothèse "il existe une injection de E dans F" par "il existe une surjection de F dans E".

Proposition 17 *Soient E et F des ensembles non vides. Il existe une injection de E vers F si et seulement s'il existe une surjection de F vers E.*

Preuve. Supposons qu'il existe une injection f de E vers F. Chaque élément de $f(E)$ a donc exactement un antécédent par f. Soit $x_0 \in E$. Soit $g : F \to E$ l'application définie ainsi : si $y \in f(E)$, alors $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f ; si $y \notin f(E)$, $g(y) = x_0$. L'application g est bien définie. Montrons qu'elle est surjective. Soit $x \in E$. Soit y son image par f. Par définition, $y \in f(E)$, donc $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f, donc $g(y) = x$. Donc x a au moins un antécédent par g, donc g est surjective. Donc il existe une surjection de F vers E. (remarque : l'application g dépend du choix de x_0, mais peu importe : pour n'importe quel choix de x_0, elle est bien définie et surjective).

Réciproquement, supposons qu'il existe une surjection g de F vers E. Chaque élément de E a donc au moins un antécédent par g. Pour chaque élément x de E, choisissons un de ses antécédents par g (peu importe lequel), et appellons-le $f(x)$. Cela définit une application $f : E \to F$. Montrons que cette application est injective. Soit $x \in E$. Par définition, $f(x)$ est un antécédent de x par g, donc $g(f(x)) = x$, donc $g \circ f = Id_E$, donc $g \circ f$ est bijective, donc injective. Donc f est injective. Donc il existe une injection de E dans F. ■

Corollaire 18 *Soient E et F des ensembles finis non vides. Il existe une surjection de E dans F si et seulement si $CardE \leq CardF$.*

Preuve. Conséquence directe des propositions 17 et 6, point b). ■

Essayons maintenant de généraliser la notion de cardinal d'un ensemble aux ensembles infinis, notamment pour pouvoir expliquer de manière précise qu'il y a des infinis plus grand que d'autres. On a vu que quand E et F sont finis non vides, il existe une injection de E vers F si et seulement si $Card\,E \leq Card\,F$. Une généralisation naturelle de la notion d' "avoir moins d'élements que" aux ensembles infinis est donc de dire que le cardinal de E est plus petit que le cardinal de F si et seulement s'il existe une injection de E dans F. On écrira ainsi $Card\,E \leq Card\,F$ pour dire : il existe une injection de E dans F (attention, quand E est infini, $Card\,E$ ne désigne pas un entier, juste un nombre abstrait qui mesurerait le "nombre d'éléments" de E ; quand on écrit $Card\,E \leq Card\,F$, on n'est donc pas en train de comparer deux réels, on veut dire : "il existe une injection de E dans F"). De même, une généralisation naturelle de la notion d' "avoir autant d'éléments que" est de dire que deux ensembles ont le même cardinal si et seulement s'il existe une bijection entre E et F, et c'est ce que signifiera la notation $Card\,E = Card\,F$. Pour que ces généralisations et ces notations soient satisfaisantes, il faudrait que si $Card\,E \leq Card\,F$ et $Card\,F \leq Card\,E$ alors $Card\,E = Card\,F$. C'est heureusement le cas, comme le montre le théorème suivant, que nous admettrons.

Théorème 19 *(Théorème de Cantor-Bernstein) Soient E et F des ensembles. S'il existe une injection $f : E \to F$ et une injection $g : F \to E$ alors il existe une bijection $h : E \to F$.*

Remarque : d'après la proposition 17, on aurait pu énoncer ce théorème ainsi : s'il existe une injection de E dans F et une surjection de E dans F alors il existe une bijection de E dans F.

Le théorème de Cantor-Bernstein est utile pour montrer qu'un ensemble est dénombrable. Ainsi, pour montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, on peut raisonner ainsi : l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui à n associe $f(n) = (n, 0)$ est injective. D'autre part, l'application $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui à (n,p) associe $g(n,p) = 2^n 3^p$ est injective (à cause de l'unicité de la décomposition d'un entier en produits de nombres premiers). Donc d'après le théorème de Cantor-Bernstein, il existe une application $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijective. *Bien voir qu'en revanche ni f ni g ne sont bijectives.*

Voici une autre preuve, constructive cette fois, du fait qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$.

Preuve. Soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ telle que pour tout couple d'entier naturel (n,p), $f(n,p) = 2^n(2p+1)$. Montrons que f est bijective. Cela prouvera que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}^*$, et donc avec $\mathbb{N}$. Montrons que f est injective. Soient (n,p) et (n',p') des couples d'entiers naturels tels que $f(n,p) = f(n',p')$. On a donc $2^n(2p+1) = 2^{n'}(2p'+1)$, donc $2^{n-n'}(2p+1) = 2p'+1$. Si $n > n'$, $2^{n-n'}(2p+1)$ est pair, donc différent de $2p'+1$. Donc $n \leq n'$. On obtient par un raisonnement symétrique $n' \leq n$, et donc $n = n'$, et donc $p = p'$, donc $(n,p) = (n',p')$. Donc f est injective. Montrons que f est surjective. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Soit n le plus grand entier tel que $q/2^n$ soit entier. Nécessairement, $q/2^n$ est impair. Il existe donc un entier naturel p tel que $q/2^n = 2p+1$. On a donc $f(n,p) = q$, donc q a au moins un antécédent par f, et f est surjective. Donc f est bijective. Une bijection explicite de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est donc donnée par $g(n,p) = 2^n(2p+1) - 1$ $\blacksquare$

Le résultat suivant montre qu'au sens des cardinaux, il n'y a pas d'ensembles infinis plus petits que $\mathbb{N}$.

Proposition 20 *Si E est un ensemble infini, alors il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans E.*

Preuve. La preuve consiste à construire l'injection pas à pas. Soit E un ensemble infini. Tout d'abord, E est non vide. Je peux donc choisir un élément de E, que j'appelle x_0. Ensuite, comme E est infini, l'ensemble $E_1 = E \backslash \{x_0\}$ est non vide. E_1 contient donc au moins un élément. J'en choisis un, et je l'appelle x_1. On continue en procédant ainsi. Supposons que j'ai construit n éléments de E, x_0, x_1,...,x_n, tels que pour tout $k \in \{1, 2, .., n\}$, $x_k \notin \{x_0, ..., x_{k-1}\}$. Comme E est infini, l'ensemble $E_{n+1} = E \backslash \{x_0, ..., x_n\}$ est non vide. Je peux donc choisir un élément dans E_{n+1} que j'appelle x_{n+1}. Par construction, $x_{n+1} \notin \{x_0, ..., x_n\}$, si bien que j'ai construit $n+1$ éléments de E, x_0, x_1,...,x_{n+1}, tels que pour tout $k \in \{1, 2, .., n+1\}$, $x_k \notin \{x_0, ..., x_{k-1}\}$. Par une récurrence dont nous omettrons les détails, on peut donc construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k \notin \{x_0, ..., x_{k-1}\}$. Posons alors, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f(n) = x_n$. Cela définit une application $f : \mathbb{N} \to E$, et cette application est injective pour la raison suivante : si $n \neq p$, alors soit $n < p$, soit $p < n$. Ces cas étant symétriques, il suffit d'examiner le cas $n < p$. On a alors par construction, $x_p \notin A = \{x_0, ..., x_{p-1}\}$. Or $x_n \in A$, donc $x_n \neq x_p$, donc $f(n) \neq f(p)$. $\blacksquare$

Prouvons maintenant certain des résultats admis dans le cours. Montrons tout d'abord qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable dans le cas général.

Preuve. Soit I un ensemble dénombrable, et pour tout i dans I, soit A_i un ensemble dénombrable. Soit $A = \cup_{i \in I} A_i$. Dans le cas où les ensembles A_i sont deux à deux distincts, nous avons montré qu'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$, et que A est donc dénombrable (voir la preuve de la proposition 16). Dans le cas où les A_i ne sont pas deux à deux distincts, cette application f n'est plus injective, mais elle reste surjective. Il existe donc une surjection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans A. Comme il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, il existe donc une surjection de $\mathbb{N}$ dans A. Mais comme A est infini, il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans A (proposition 20). Donc d'après le théorème de Cantor-Bernstein, il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans A, donc A est dénombrable. $\blacksquare$

Montrons maintenant que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Preuve. Par définition, $\mathbb{Q} = \{p/q | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$. Pour tout q dans $\mathbb{N}^*$, posons $A_q = \{p/q, p \in \mathbb{Z}\}$. L'ensemble A_q est à l'évidence en bijection avec $\mathbb{Z}$, et donc dénombrable. De plus $\mathbb{Q} = \cup_{q \in \mathbb{N}^*} A_q$. Comme $\mathbb{N}^*$ est dénombrable, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est donc une union dénombrable d'ensembles dénombrables. Donc $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

On peut aussi raisonner ainsi : l'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$ définie par $f(p,q) = p/q$ est surjective, par définition de $\mathbb{Q}$. De plus, en utilisant le fait que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables, on montre facilement que $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable, et donc qu'il existe une bijection g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. L'application $f \circ g$ est alors une surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$. Comme par ailleurs il existe à l'évidence une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ ($n \to n$), il suit du théorème de Cantor-Bernstein qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$. $\blacksquare$