Chapitre 2 : ensembles

1 Définitions

Un ensemble est une collection d'objets. Ces objets sont appelés éléments de l'ensemble. Pour dire que x est un élément de l'ensemble E , on écrit $x \in E$. Pour dire que x n'est pas un élément de E , on écrit $x \notin E$. Un ensemble est caractérisé par ses éléments. Deux ensembles A et B sont donc égaux s'ils ont les mêmes éléments. On note alors $A = B$.

L'ensemble qui contient les éléments *Truc*, *Bidule* et *Machin* se note

$$\{\textit{Truc}, \textit{Bidule}, \textit{Machin}\}$$

Un objet est élément d'un ensemble donné s'il figure dans la liste des éléments de cet ensemble. L'ordre dans laquelle on écrit les éléments ne compte donc pas : l'ensemble $\{\textit{Machin}, \textit{Truc}, \textit{Bidule}\}$ est le même que l'ensemble $\{\textit{Truc}, \textit{Bidule}, \textit{Machin}\}$. De même, si l'on rajoute dans la liste des éléments un élément qui y figure déjà, on ne change pas l'ensemble : l'ensemble

$$\{\textit{Truc}, \textit{Bidule}, \textit{Machin}, \textit{Bidule}\}$$

est le même que l'ensemble $\{\textit{Truc}, \textit{Bidule}, \textit{Machin}\}$.

On peut décrire un ensemble de deux manières. Soit en donnant la liste de ses éléments de manière explicite, soit en le définissant comme l'ensemble des éléments satisfaisant une certaine propriété. Par exemple, l'ensemble A des entiers allant de 0 à 5 inclus peut notamment être décrit des trois manières suivantes :

$$A = \{n \in \mathbb{N}, n \leq 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{n \in \mathbb{Z}, 0 \leq n \leq 5\}$$

L'ensemble qui n'a aucun élément s'appelle ensemble vide. On le note $\emptyset$. On a donc $\emptyset = \{\}$.

Remarque : $\{n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$ se lit : "l'ensemble des n de $\mathbb{N}$ tel que $n \leq 5$ ". On peut aussi écrire $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 5\}$, et $\{n \in \mathbb{N} : n \leq 5\}$.

Les ensembles que vous êtes les plus habitués à manipuler sont des ensembles de nombres : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{N}^*$, $\{1, 2, 3\}$, etc. Toutefois, il y a bien d'autres ensembles intéressants en mathématiques. Par exemple, l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; l'ensemble des fonctions polynômes ; l'ensemble des suites de réels qui convergent ; ou des ensembles d'objets que vous ne connaissez pas encore, comme les matrices. On peut aussi s'intéresser dans des applications des mathématiques à des ensembles issus de la vie courante : l'ensemble des femmes de plus de 65 ans, l'ensemble des étudiants de Dauphine, etc.

Inclusion, ensemble des parties

On dit que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B si tout élément de A est un élément de B . On note alors $A \subset B$. Deux ensembles A et B sont égaux si et seulement si A est inclus dans B et B est inclus dans A . La méthode la plus courante pour montrer que deux ensembles sont égaux est d'ailleurs de procéder par double inclusion, c'est à dire de montrer d'abord que A est inclus dans B , puis que B est inclus dans A . L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble : pour tout ensemble B , $\emptyset \subset B$ (en effet, puisque $\emptyset$ n'a pas d'éléments, il n'est pas possible de trouver un élément de $\emptyset$ qui ne soit pas dans B).

Pour dire que A est inclus dans B , on dit aussi que A est un sous-ensemble de B , ou encore que A est une partie de B . L'ensemble des parties de B se note $\mathcal{P}(B)$.

Exemple : soit $B = \{1, 2, 3\}$. Quels sont les parties de B ? Ce sont les ensembles inclus dans B . C'est à dire : $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, et $\{1, 2, 3\} = B$. On a donc :

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, B\}$$

Remarques :

◇ l'ensemble B et l'ensemble vide sont bien des ensembles inclus dans B . Ce sont donc bien des parties de B . Un sous-ensemble de B qui est différent de B est un sous-ensemble *strict* de B . Un sous-ensemble de B qui est différent de B et de $\emptyset$ est un sous-ensemble *non-trivial* de B .

◇ un ensemble qui ne contient qu'un seul élément s'appelle un singleton. Il faut bien distinguer le nombre 3 du singleton $\{3\}$. Ces deux objets n'ont pas la même nature. Le premier est un nombre, c'est un objet du même type que 2, 5, 12, etc. Le second est un ensemble de nombres, c'est un objet du même type que $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 8\}$, $\{2, 5, 7, 9\}$, etc. De la même façon, supposons qu'il y ait un seul étudiant de Dauphine qui soit né un 29 février. Il y aurait quand même une différence de nature entre l'ensemble des étudiants de Dauphine né un 29 février et cet étudiant. Le premier est un ensemble d'étudiants (qui pourrait, a priori, être vide, ou avoir plusieurs éléments), le second est un étudiant.

◇ dans l'exemple ci-dessus, B a 3 éléments et $\mathcal{P}(B)$ a $8 = 2^3$ éléments. Ce n'est pas un hasard. On montrera plus tard que si E est un ensemble fini à n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini à 2^n éléments.

2 Union et intersection de deux ensembles

Dans tout ce qui suit, A et B désignent des ensembles. L'union des ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B . On la note $A \cup B$. Formellement,

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

L'intersection des ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B . On la note $A \cap B$. Formellement,

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$$

Par exemple, si $A = \{2, 5, 7\}$ et $B = \{1, 5, 7, 9\}$, on a $A \cup B = \{2, 5, 7, 1, 5, 7, 9\} = \{1, 2, 5, 7, 9\}$, et $A \cap B = \{5, 7\}$.

Si $A \subset B$, on a $A \cup B = B$ et $A \cap B = A$. En fait, les trois propositions $A \subset B$, $A \cup B = B$ et $A \cap B = A$ sont équivalentes (prouvez-le!).

Deux ensembles A et B sont dits *disjoints* si $A \cap B = \emptyset$. Des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont *deux à deux disjoints* si pour tous i et j dans $\{1, 2, \dots, n\}$,

$$i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

Remarque : les notations utilisées pour l'union et l'intersection vous sont familières : vous les utilisiez en théorie des probabilités pour désigner la réunion ou l'intersection de deux événements. Ceci vient du fait qu'en théorie des probabilités, un événement est une partie de l'ensemble des possibles.

Commutativité, associativité, distributivité

Soit A, B, C des ensembles quelconques. On a : $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$. On dit que l'union et l'intersection sont des opérations commutatives. D'autre part,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

On dit que l'union et l'intersection sont des opérations associatives. Enfin,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

On dit que l'union est distributive sur l'intersection et que l'intersection est distributive sur l'union.

Exercice 1 *Démontrer la commutativité et l'associativité de l'union (respectivement, de l'intersection) en utilisant la commutativité et l'associativité du OU (respectivement, du ET). De même, démontrer que l'union est distributive sur l'intersection, et que l'intersection est distributive sur l'union, en utilisant la distributivité du OU sur le ET, et la distributivité du ET sur le OU.*

Une conséquence de l'associativité de l'union et de l'intersection est que les expressions $A \cup B \cup C$ et $A \cap B \cap C$ ne sont pas ambiguës (on n'a pas besoin de parenthèses). La première désigne l'ensemble des éléments qui appartiennent à au moins l'un des trois ensemble A, B, C . La seconde désigne l'ensemble des éléments qui appartiennent aux trois ensembles à la fois.

Exercice 2 Soient $A = \{2, 5, 7\}$, $B = \{1, 5, 7, 9\}$ et $C = \{2, 7, 9, 10\}$. Donner la liste des éléments de $A \cup B \cup C$ et de $A \cap B \cap C$. Réponse en note.¹

3 Différence de deux parties, complémentaire d'une partie

Ensemble "A moins B"

Soient A et B deux ensembles. On appelle "A moins B", et on note $A \setminus B$, l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B . On a donc :

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B)$$

Par exemple, si $A = \{2, 5, 7\}$ et $B = \{1, 5, 7, 9\}$, on a $A \setminus B = \{2\}$ et $B \setminus A = \{1, 9\}$.

Pour tout ensemble A , on a $A \setminus \emptyset = A$, et $A \setminus A = \emptyset$. De plus, pour tous ensembles A et B , on a $A \subset B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$.

Complémentaire

Soit E un ensemble. Si A est une partie de E , l'ensemble $E \setminus A$ s'appelle aussi complémentaire de A dans E . On le note $C_E(A)$. Quand il n'y a pas ambiguïté sur E , on le note plus simplement A^c ou $\bar{A}$. D'une manière générale on a

$$x \in C_E(A) \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A)$$

Si $x \in E$, on a $x \in C_E(A) \Leftrightarrow x \notin A$, et $x \notin C_E(A) \Leftrightarrow x \in A$.

Exemples : 1) Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Soit $A = \{2, 3\}$. On a $C_E(A) = \{1, 4, 5\}$. Soit $B = C_E(A)$. On a $C_E(B) = \{2, 3\} = A$.

2) Soit $E = \mathbb{R}$. Soit $A = [0, 1]$. On a $C_{\mathbb{R}}(A) = \{x \in \mathbb{R}, x \notin [0, 1]\} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. Soit $B = C_E(A)$. On a $C_E(B) = [0, 1] = A$

Dans les deux exemples précédents, $C_E(B) = C_E(C_E(A)) = A$. Ce n'est pas un hasard :

Proposition : soit E un ensemble. Soit $A \subset E$. On a : $C_E(C_E(A)) = A$.

Preuve. (On donne ici un exemple de raisonnement par équivalence pour montrer l'égalité de deux ensembles. Ceci afin de mettre en évidence le lien entre la négation en logique et le passage au complémentaire en théorie des ensembles. Toutefois, dans un premier temps, nous déconseillons ce type de raisonnement aux étudiants car il offre plus de possibilités d'erreurs qu'un raisonnement par double inclusion.)

Soit $x \in E$. On a $x \in C_E(C_E(A))$ ssi $\text{non}(x \in C_E(A))$. Mais comme $x \in E$, $x \in C_E(A)$ ssi $\text{non}(x \in A)$. On obtient donc $x \in C_E(C_E(A))$ ssi $\text{non}(\text{non}(x \in A))$, c'est à dire ssi $x \in A$ puisqu'une double négation est équivalente à une absence de négation. Les ensembles $C_E(C_E(A))$ et A ont donc bien les mêmes éléments : ils sont donc égaux. ■

Cette propriété se retient ainsi : le complémentaire du complémentaire est l'ensemble de départ.

Le complémentaire dans E de l'ensemble vide est l'ensemble E tout entier. Le complémentaire dans E de E lui-même est l'ensemble vide : $C_E(\emptyset) = E$, $C_E(E) = \emptyset$.

¹ $A \cup B \cup C = \{1, 2, 5, 7, 9, 10\}$, $A \cap B \cap C = \{7\}$.

Proposition : soit E un ensemble. Soient A et B des parties de E . On a alors :

$$A \subset B \Leftrightarrow C_E(B) \subset C_E(A)$$

Preuve. Preuve 1 (par double inclusion) Supposons $A \subset B$. Montrons $C_E(B) \subset C_E(A)$. Soit x dans $C_E(B)$. On a donc $x \in E$ et $x \notin B$. Comme $A \subset B$ et $x \notin B$, il s'ensuit que $x \notin A$. Or $x \in E$. Donc $x \in C_E(A)$. Donc $C_E(B) \subset C_E(A)$. Réciproquement, supposons $C_E(B) \subset C_E(A)$. Notons $A' = C_E(B)$ et $B' = C_E(A)$. A' et B' sont deux parties de E telles que $A' \subset B'$. D'après la démonstration qui vient d'être faite, on a donc $C_E(B') \subset C_E(A')$. Or $C_E(B') = C_E(C_E(A)) = A$ et de même $C_E(A') = B$. Donc $A \subset B$.

Preuve 2 (en utilisant qu'une implication est équivalente à sa contraposée). Par définition, $C_E(B) \subset C_E(A)$ ssi pour tout $x \in E$ tel que $x \notin B$, on a ($x \in E$ et $x \notin A$), c'est à dire ssi pour tout x de E , si $x \notin B$, alors $x \notin A$. Or l'implication "si $x \notin B$, alors $x \notin A$ " est équivalente à sa contraposée "si non ($x \notin A$) alors non ($x \notin B$)", c'est à dire : "si $x \in A$ alors $x \in B$ ". Donc $C_E(B) \subset C_E(A)$ ssi pour tout x de E , si $x \in A$ alors $x \in B$, donc ssi pour tout x de $A \cap E$, on a $x \in B$. Comme $A \subset E$, c'est équivalent à $A \subset B$. ■

Complémentaire de l'union, complémentaire de l'intersection.

Proposition : Soient E un ensemble, et A et B deux sous-ensembles de E . On a :

- (i) $C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$.
- (ii) $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$

En notant $\bar{A}$ le complémentaire dans E de A , les propriétés précédentes s'écrivent :

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Ces propriétés se retiennent de la manière suivante :

- le complémentaire de l'union est l'intersection des complémentaires
- le complémentaire de l'intersection est l'union des complémentaires

Preuve. Les résultats de la proposition sont intuitivement évidents : le (i) dit qu'un objet n'est pas dans l'union de A et de B s'il n'est ni dans A ni dans B ; le (ii) qu'un objet n'est pas dans l'intersection de A et de B s'il n'est pas dans A ou s'il n'est pas dans B . Voici toutefois une preuve rigoureuse du (i).

Soit $x \in \overline{A \cup B}$. On a d'une part $x \in E$, et d'autre part $\text{non}(x \in A \text{ ou } x \in B)$, donc $\text{non}(x \in A)$ et $\text{non}(x \in B)$. Donc $x \in \bar{A}$ et $x \in \bar{B}$, donc $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$. On a donc $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$. Réciproquement, soit $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$. On a d'une part $x \in E$, et d'autre part ($x \in \bar{A}$) et ($x \in \bar{B}$), donc $\text{non}(x \in A)$ et $\text{non}(x \in B)$, donc $\text{non}(x \in A \text{ ou } x \in B)$, donc $\text{non}(x \in A \cup B)$. Donc $x \in \overline{A \cup B}$. On a donc $\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. Donc par double inclusion $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Le lecteur attentif remarquera qu'au lieu d'une preuve par double inclusion on aurait donné une preuve plus rapide par équivalences successives. C'est vrai ici, et le raisonnement est assez simple pour qu'il n'y ait pas grand risque d'erreur. Toutefois, nous ne répéterons jamais assez que pour des preuves plus complexes, raisonner par équivalence est très souvent source d'erreurs.

La preuve du (ii) est similaire à celle du (i) et laissée en exercice. ■

4 Mise en garde

Il y a des liens entre les expressions utilisées en logique (et, ou, etc.) et les opérations sur les ensembles (intersection, union, etc.), mais il ne faut pas mélanger. Les expressions "et", "ou", "implique", etc. sont à placer entre des propositions, pas entre des ensembles. Les signes $\cap$, $\cup$, $\subset$, etc. sont à placer entre des ensembles, pas entre des propositions. En d'autres termes, si P et Q sont des propositions, " P et Q " a un sens, mais " $P \cap Q$ " n'en a pas. Si A et B sont des ensembles, " $A \cap B$ " a un sens, mais " A et B " n'en a pas.

5 Produit cartésien

Un couple est la donnée de deux objets dans un certain ordre. Bien noter que dans un couple, l'ordre compte : $(1, 3) \neq (3, 1)$. Un triplet (resp. quadruplet, quintuplet) est la donnée de trois (resp. quatre, cinq) objets dans un certain ordre. Soit n un entier naturel non nul. Un n -uplet est la donnée de n objets dans un certain ordre.

A partir de deux ensembles A et B , on crée un nouvel ensemble noté $A \times B$, dont les éléments sont les couples (a, b) constitués d'un élément a de A et d'un élément b de B , dans cet ordre.

$$A \times B = \{ (x, y), x \in A \text{ et } y \in B \}.$$

On l'appelle produit cartésien de A et de B .

Exemple 1 : si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 7\}$, alors

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 7), (2, 1), (2, 7), (3, 1), (3, 7)\}$$

et

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (7, 1), (7, 2), (7, 3)\}$$

Exemple 2 : si $A = \{\text{saumon, poulet}\}$ et $B = \{\text{banane, orange}\}$, alors

$$A \times B = \{ (\text{saumon, banane}), (\text{saumon, orange}), (\text{poulet, banane}), (\text{poulet, orange}) \}$$

(Pour vous persuader de l'importance de l'ordre dans un couple, dites-vous que manger une banane après avoir mangé du saumon n'est pas la même chose que manger du saumon après avoir mangé une banane)

On peut généraliser cette construction à un nombre fini d'ensembles. Ainsi, si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des ensembles, on peut construire l'ensemble

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

dont les éléments sont des n -uplets $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tels que $a_i \in A_i$ pour tout i dans $\{1, 2, \dots, n\}$.

Cas particulier : $A \times A$ se note A^2 , $\underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ fois}}$ se note A^n .

Par exemple on note $\mathbb{N}^2$ l'ensemble des couples d'entiers naturels et $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples de réels.

Exercice 3 Soient A et B les intervalles : $A = [0, 1]$ et $B = [2, 5]$. Dessiner dans le plan $\mathbb{R}^2$ les ensembles $A \times B$ et $B \times A$. Bien noter que $A \times B \neq B \times A$.

6 Union et intersection d'un nombre quelconque d'ensembles

Notations Les notions d'union et d'intersection se généralisent à un nombre quelconque d'ensembles. Commençons par l'union. Soit $n \geq 1$ un entier et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des ensembles. L'union des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ se note $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, ou encore, de manière plus concise,

$$\bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} A_i$$

C'est l'ensemble des éléments qui appartiennent à au moins l'un des ensembles A_i : on a donc

$$x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \text{ ssi il existe } i \text{ dans } \{1, 2, \dots, n\} \text{ tel que } x \in A_i$$

De même, l'intersection des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ se note $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ ou encore

$$\bigcap_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} A_i$$

C'est l'ensemble des éléments qui appartiennent à tous les A_i :

$$x \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \text{ ssi pour tout } i \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ on a } x \in A_i$$

Plus généralement, si I est un ensemble quelconque (en particulier, pas forcément fini, et pas forcément un sous-ensemble de $\mathbb{N}$), et si pour tout $i \in I$, A_i est un ensemble,

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

désigne l'ensemble des éléments qui appartiennent à au moins l'un des ensembles A_i :

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \text{ ssi il existe } i \text{ dans } I \text{ tel que } x \in A_i$$

De même, $\bigcap_{i \in I} A_i$ désigne l'ensemble des éléments qui appartiennent à tous les A_i :

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \text{ ssi pour tout } i \in I, \text{ on a } x \in A_i$$

Propriétés Les propriétés essentielles de l'union et de l'intersection se généralisent à un nombre quelconque d'ensembles :

$$\text{(distributivité de l'union)} \quad A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \dots \cap (A \cup B_n)$$

$$\text{(distributivité de l'intersection)} \quad A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$$

De même,

$$\text{(complémentaire de l'union)} \quad C_E(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = C_E(A_1) \cap C_E(A_2) \cap \dots \cap C_E(A_n)$$

$$\text{(complémentaire de l'intersection)} \quad C_E(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = C_E(A_1) \cup C_E(A_2) \cup \dots \cup C_E(A_n)$$

En effet, dans la première égalité, l'ensemble de gauche et l'ensemble de droite sont tous les deux égaux à l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent à aucun des A_i . Dans la seconde égalité, l'ensemble de gauche et l'ensemble de droite sont tous les deux égaux à l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à tous les A_i .

Plus généralement, comme on le verra en TD, si I est un ensemble d'indices quelconque et pour tout i dans I , B_i est un ensemble :

$$A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i) \quad \text{et} \quad A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

De même, si E est un ensemble et pour tout i dans I , $A_i \subset E$:

$$C_E \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} C_E(A_i) \quad \text{et} \quad C_E \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} C_E(A_i)$$

Remarque 6 : l'union des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ peut aussi s'écrire $\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$ ou $\bigcup_{i=1}^n A_i$.

Remarque 7 : La variable i est muette : les ensembles $\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$ et $\bigcup_{1 \leq k \leq n} A_k$ sont les mêmes.

Remarque 8 (notion d'opération) : Une opération (plus précisément, une opération binaire) sur un ensemble F est une application qui, à un couple d'éléments de F associe un élément de F . Par exemple, dans $\mathbb{N}$, l'addition (respectivement, la multiplication) associe au couple d'entiers naturel (n, p) un entier naturel noté $n + p$ (respectivement, $n \times p$). De même, l'union associe à un couple (A, B) de parties de E une partie de E noté $A \cup B$. C'est donc une opération sur l'ensemble des parties de E . De même, l'intersection est une opération sur $\mathcal{P}(E)$.

7 Quelques propriétés évidentes

Voici quelques propriétés évidentes que vous pouvez utiliser directement. Ci-dessous, si une formule est donnée sous la forme d'une implication, c'est que sa réciproque est fautive.

Ensembles :

Soient A, B, C des ensembles. On a toujours :

- ◇ Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.
- ◇ $A \cap B \subset A$ et $A \subset A \cup B$
- ◇ Si $A \subset B$ alors pour tout ensemble C , $A \subset (B \cup C)$ et $(A \cap C) \subset B$
- ◇ $(A \subset C \text{ et } B \subset C) \Leftrightarrow A \cup B \subset C$
- ◇ $A \cup \emptyset = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$
- ◇ $(A \neq \emptyset \text{ ou } B \neq \emptyset) \Leftrightarrow (A \cup B \neq \emptyset)$

Ensembles et quantificateurs (en plus des formules du polycopié de logique)

- ◇ Si $A \subset B$ et (il existe x dans A tel que $P(x)$) alors (il existe x dans B tel que $P(x)$)
- ◇ Si $A \subset B$ et (pour tout x dans B , on a $P(x)$) alors (pour tout x dans A , on a $P(x)$)
- ◇ (Il existe x dans A tel que $P(x)$) ou (il existe x dans B tel que $P(x)$)
 $\Leftrightarrow$ il existe x dans $A \cup B$ tel que $P(x)$.
- ◇ Si (il existe x dans $A \cap B$ tel que $P(x)$) alors ([il existe x dans A tel que $P(x)$] et [il existe x dans B tel que $P(x)$]).
- ◇ (Pour tout x dans A , on a $P(x)$) et (pour tout x dans B , on a $P(x)$)
 $\Leftrightarrow$ pour tout x dans $A \cup B$, on a $P(x)$.

8 Rappel des principales définitions et propriétés

Soient E un ensemble et A, B, C des parties de E . Soit I un ensemble d'indices, et pour tout i dans I , soit A_i une partie de E . Par définition :

$$\begin{array}{ll} A \cup B = \{x, x \in A \text{ ou } x \in B\} & A \cap B = \{x, x \in A \text{ et } x \in B\} \\ A \setminus B = \{x, x \in A \text{ et } x \notin B\} & C_E(A) = E/A, \text{ noté aussi } \bar{A} \text{ ou } A^c \\ A \times B = \{(a, b), a \in A \text{ et } b \in B\} & A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}} \end{array}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x, \exists i \in I, x \in A_i\} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x, \forall i \in I, x \in A_i\}$$

Principales propriétés (ci-dessous, si $X \subset E$, on note $\bar{X}$ le complémentaire de X dans E) :

$$\begin{array}{ll} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} & \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \\ \bar{\bar{A}} = A & A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A} \end{array}$$

Les propriétés des deux premières lignes se généralisent à un nombre quelconque d'ensembles.