Quelques notions de logique

Vous ne comprendrez pas tout à la première lecture. Quand quelque chose vous bloque, passez, et revenez-y ensuite. Les résultats les plus importants figurent en gras. Les recopier vous aidera à les retenir. Relisez ce document régulièrement, jusqu'à ce que tout soit devenu clair. Sur le même sujet, vous pouvez lire le 1er chapitre du livre de F. Liret et D. Martinais : Algèbre, 1ère année, chez Dunod.

1 Les lettres grecques et les symboles mathématiques

α alpha	κ kappa	τ tau	Λ Lambda	$\forall$ Pour tout
β beta	λ lambda	υ upsilon	Ξ Xi	$\exists$ Il existe
γ gamma	μ mu	ϕ phi	Π Pi	$\Rightarrow$ implique
δ delta	ν nu	χ chi	Σ Sigma	$\Leftrightarrow$ équivalent à
ϵ epsilon	ξ xi	ψ psi	Υ Upsilon	$\bigcap$ intersection
ζ zeta	o omicron	ω omega	Φ Phi	$\bigcup$ union
η eta	π pi	Γ Gamma	Ψ Psi	$\emptyset$ ens. vide
θ theta	ρ rho	Δ Delta	Ω Omega	$\in$ appartient à
ι iota	σ sigma	Θ Theta		$\subset$ est inclus dans

2 Les propositions

2.1 Un peu de vocabulaire

Dans ce cours, vous rencontrerez de nombreux énoncés mathématiques comme :
1) Soit n un entier naturel.
2) Il existe un réel x tel que $x^2 = 2$
3) $6 < \frac{25}{4}$
4) Pour tout entier naturel n, on a $n^2 \geq n$
5) Pour tout réel x, on a $x^2 \geq x$
6) Si x est un réel, on appelle valeur absolue de x le plus grand des nombres x et $-x$.
7) Si n est un entier naturel pair, alors n^2 est pair.

Ces énoncés sont de types différents : l'énoncé 1) introduit une notation. L'énoncé 6) est une définition. Les énoncés 2), 3), 4), 5) et 7) affirment qu'une certaine propriété est vraie. Ce sont des *propositions.*

Définition : une proposition est un énoncé mathématique qui affirme une propriété.

Une proposition est soit vraie soit fausse. Elle ne peut pas être à la fois vraie et fausse. Parmi les propositions ci-dessus, les propositions 2), 3), 4) et 7) sont vraies. La proposition 5) est fausse (en effet, 1/2 est un réel et on n'a pas $(1/2)^2 \geq 1/2$).

[1]Cours de Y. Viossat. Ce document s'inspire d'un polycopié écrit par Geneviève Pons.

On distingue deux types de propositions vraies : les **axiomes** et les **théorèmes**. Un axiome est une proposition dont on décide *a priori* qu'elle est vraie : elle ne se démontre donc pas. Un **théorème** est une proposition dont on démontre qu'elle est vraie.[2]

Exemples :

P : “$9 \geq 8$" est une proposition vraie.

Q : “Il existe un réel x tel que $x^2 < 0$" est une proposition fausse.

A : “Par deux points donnés on peut faire passer une droite et une seule" est un axiome de la géométrie euclidienne.

T : “Toute fonction dérivable est continue." est un théorème qui sera démontré dans le cours d'analyse.

Dans la suite, les lettres majuscules P, Q, R désigneront des propositions.

Un des buts des mathématiques est bien sûr de prouver des théorèmes intéressants. Cela suppose notamment de savoir former de nouvelles propositions et de savoir déterminer si ces nouvelles propositions sont vraies ou fausses. Pour cela on dispose :

- des propositions déjà formées (au début, uniquement les axiomes) ;
- d'expressions comme "non", "et", "ou", "implique", "est équivalent à", qu'on appelle des connecteurs ;
- de règles de construction des propositions qui nous disent comment former de nouvelles propositions à l'aide de ces expressions et des propositions déjà formées ;
- de règles de logique, qui nous permettent de déterminer si ces nouvelles propositions sont vraies ou fausses.

Préciser ces règles, c'est définir le sens des connecteurs et étudier leurs propriétés. C'est ce que nous allons faire dans ce chapitre.

2.2 Négation d'une proposition

Définition : La négation de la proposition P, noté **nonP**, est la proposition qui affirme que P est fausse. Elle est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

On peut enchaîner les négations et former par exemple la double négation de P : non(nonP). Les propositions P et non(nonP) ont toujours la même "valeur de vérité" (elles sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses). On dit qu'elles sont équivalentes.

Exemple : la négation de P : "La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$" est nonP : "la fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$". Sa double négation est non(nonP) : "Il n'est pas vrai que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$". Les propositions P et non(nonP) sont équivalentes.

[2]Dans la pratique, d'autres mots sont également utilisés : le nom de théorème est souvent réservé aux résultats les plus importants. Un *lemme* est un résultat intermédiaire, utilisé dans la démonstration d'un théorème. Un *corollaire* est un résultat qui découle immédiatement d'un théorème. Enfin, comme dans la suite du cours on n'écrira que des propositions vraies, on emploiera le mot proposition avec le même sens que le mot théorème, mais pour des résultats un peu moins importants.

2.3 Sens du ET et du OU en mathématiques.

Remarque : Pour distinguer le ET mathématique du "et" du langage courant, on écrira le premier en majuscule. Même chose pour le OU.

La proposition : "$x > 0$ ET $x < 1$" est du type "P ET Q", où P est la proposition "$x > 0$" et Q la proposition "$x < 1$. Elle affirme que les propositions P et Q sont toutes les deux vraies. La proposition "$x > 0$ OU $x < 1$" est du type "P OU Q", avec pour P et Q les mêmes propositions que précédemment. Elle affirme qu'au moins l'une des propositions P et Q est vraie.

D'une manière générale, **la proposition P ET Q est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies, et est fausse sinon. La proposition P OU Q est vraie si au moins l'une des deux propositions P et Q est vraie, et est fausse sinon.**

Bien noter que si P et Q sont toutes les deux vraies, alors P OU Q est vraie. On dit que le “OU" est inclusif.[3]

Exercice : les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Réponses au bas de la page.[4]

a) “$3 > 2$ ET $5 > 7$" ; b) “$3 > 2$ OU $5 > 7$" ; c) “$3 > 2$ ET 4 est un nombre pair" ;
d) “$3 > 2$ OU 4 est un nombre pair" ; e) “$5 > 10$ ET $2 > 3$" ; f) “$5 > 10$ OU $2 > 3$".

On peut résumer les définitions des termes "non", "ET" et "OU" par la table suivante, appelé table de vérité du non, du ET et du OU. On a également fait figurer la définition de la proposition "nonP OU Q" pour des raisons qui deviendront claires dans la section suivante.

P	Q	non P	P ET Q	P OU Q	nonP OU Q
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

Cette table se lit ainsi : si P est vraie et Q est vraie, alors : nonP est fausse, P ET Q est vraie, P OU Q est vraie, et nonP OU Q est vraie ; si P est vraie et Q est fausse, alors : nonP est fausse, P ET Q est fausse, P OU Q est vraie, etc.

Remarques :

1) Pour toute proposition P, l'une des deux propositions P et nonP est vraie, et l'autre est fausse. Il s'ensuit que la proposition P ET nonP est toujours fausse, et la proposition P OU nonP toujours vraie.

2) La proposition "Q OU P" veut dire la même chose que la proposition "P OU Q", à savoir qu'au moins l'une des propositions P et Q est vraie. De même, la proposition "Q ET P" veut dire la même chose que la proposition "P ET Q". **On dit que le OU et le ET sont *commutatifs*.**

[3]En français, le mot "ou" est souvent ambigu. Ainsi, quand on dit "Pour bénéficier d'une réduction, il faut être étudiant ou avoir moins de 26 ans.", cela ne veut pas dire que si vous êtes étudiant et avez moins de 26 ans, vous ne pourrez pas bénéficier de la réduction : le ou est alors inclusif. En revanche, l'expression "fromage ou dessert" veut dire : soit fromage, soit dessert, mais pas les deux. Le ou est alors exclusif. En mathématiques, le ou est toujours inclusif.

[4]Réponses : a) F ; b) V ; c) V ; d) V ; e) F ; f) F

3) On peut combiner des ET, des OU et des NON pour former de nouvelles propositions. Il faut alors bien faire attention à la place des parenthèses, car le sens en dépend. Supposons par exemple que la proposition P soit fausse et que la proposition Q soit vraie. Dans ce cas, P ET (nonP OU Q) est fausse (car P est fausse donc P ET bidule est fausse, quelque soit la proposition bidule) ; en revanche, (P ET nonP) OU Q est vraie (car Q est vraie, donc machin OU Q est vraie, quelque soit la proposition machin).

Exercice : les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Réponse en note.[5]
a) $2+2=5$ ET $(2+2\neq 5$ OU $3^2=9)$; b) $(2+2=5$ ET $2+2\neq 5)$ OU $3^2=9$

4) Dans certains cas très particuliers, la place des parenthèses n'est pas importante. Ainsi, P ET (Q ET R) veut dire la même chose que (P ET Q) ET R, à savoir que les trois propositions P, Q, R sont vraies. On peut donc écrire simplement P ET Q ET R, sans parenthèses, sans que ce soit ambigu. De même, P OU (Q OU R) veut dire la même chose que (P OU Q) OU R : au moins l'une des propositions P, Q, R est vraie. On peut donc écrire simplement P OU Q OU R. **On dit que le ET et le OU sont *associatifs*.**

2.4 Implication

Les mathématiciens aiment bien définir les notions qu'ils utilisent à partir du plus petit nombre de définitions de base possibles. Aussi ont-ils cherché à définir la notion d'implication à partir des expressions "non" et "OU". Pour voir comment cela est possible, analysons un exemple.

Soient x et y des réels. La proposition "Si $x<0$ alors $y<0$" veut dire qu'on est dans l'un des trois cas suivants : $(x<0,\, y<0)$, $(x\geq 0,\, y<0)$, ou $(x\geq 0,\, y\geq 0)$, mais pas dans le cas $(x<0,\, y\geq 0)$. D'une manière générale, "Si P alors Q" veut dire qu'on est dans l'un des trois cas suivants : (P vraie, Q vraie) , (P fausse, Q vraie), ou (P fausse, Q fausse), mais pas dans le cas (P vraie, Q fausse). Ce qu'on peut exprimer par : la proposition P ET nonQ est fausse.

Considérons maintenant la proposition nonP ou Q. D'après la table de la section précédente, cette proposition est vraie dans les trois cas suivant : (P vraie, Q vraie) ; (P fausse, Q vraie) ; (P fausse, Q fausse), et elle est fausse dans le dernier cas possible : (P vraie, Q fausse). Bien que ce ne soit pas évident à priori, on constate donc que "nonP ou Q" veut dire la même chose que "Si P alors Q". Ceci a amené les mathématiciens à définir la proposition "Si P alors Q" comme *étant* la proposition nonP ou Q.

Définition : la proposition “Si P alors Q" est la proposition **nonP ou Q**. Dans les formules, elle se note $P\Rightarrow Q$.

Vocabulaire : dans la proposition "Si P alors Q", P s'appelle l'hypothèse et Q la conclusion. Au lieu de "Si P alors Q" on peut dire aussi "P implique Q". Cela veut dire la même chose. La proposition “Si Q alors P" s'appelle *l'implication réciproque* de “Si P alors Q". Enfin, l'implication “Si nonQ alors nonP" s'appelle *l'implication contraposée* de “Si P alors Q".

Une manière de retenir la définition de l'implication est la suivante : en mathématiques, quand on dit qu'une hypothèse implique une conclusion, on veut dire que l'hypothèse est fausse ou que la

[5] a) F ; b) V. C'est un cas particulier de l'exemple précédent.

conclusion est vraie (éventuellement les deux).

2.5 Propositions équivalentes

Définition : On dit que la proposition P est équivalente à la proposition Q, et on note $P \Leftrightarrow Q$, si P implique Q et Q implique P.

Vocabulaire : pour dire que P est équivalente à Q, on dit aussi que P est vraie si et seulement si Q est vraie. On dit également que P est une condition nécessaire et suffisante de Q.

La table ci-dessous montre que l**a proposition P est équivalente à la proposition Q si et seulement si elles sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses**.

Table de "$\Leftrightarrow$" :

P	Q	P $\Rightarrow$ Q	Q $\Rightarrow$ P	P $\Leftrightarrow$ Q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Exemple de propositions équivalentes : les propositions "$3^9 \geq 10^5$" et "$3^9 + 1 \geq 10^5 + 1$" sont équivalentes. Si x et y sont des réels, les propositions "$|x| > |y|$" et "$x^2 > y^2$" sont équivalentes.

2.5.1 Quelques propriétés de l'équivalence :

En utilisant que deux propositions sont équivalentes si et seulement si elles sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses, on montre facilement que pour n'importe quelles propositions P, Q, R :

1. P est équivalente à P (on dit que l'équivalence est *réflexive*)
2. Si P est équivalente à Q alors Q est équivalente à P (l'équivalence est *symétrique*)
3. **Si P est équivalente à Q et que Q est équivalente à R alors P est équivalente à R** (l'équivalence est *transitive*).
4. **"P est équivalente à Q" si et seulement si "nonP est équivalente à nonQ"**.

Exemple de transitivité de l'équivalence : soient x et y des réels. Soient P, Q et R les trois propositions suivantes :

P : $x + 17 > y + 15$; Q : $x + 2 > y$; R : $(x + 2)^3 > y^3$

P est équivalente à Q et Q est équivalente à R, donc P est équivalente à R.

Soient P, Q, R trois propositions. Supposons que P et Q soient équivalentes. Alors la proposition complexe P ET R est équivalente à Q ET R. (En effet, si P ET R est vraie alors P est vraie et R est vraie. Mais puisque P est vraie et que P et Q sont équivalentes, Q est vraie. Donc Q est vraie et R est vraie, donc Q ET R est vraie. On montre de même que si Q ET R est vraie, alors P ET R est vraie. On a donc bien montré que P ET R et Q ET R sont équivalentes.) De même, si P et Q sont équivalentes, alors P OU R est équivalente à Q OU R (prouvez-le !).

Plus généralement, appelons proposition complexe une proposition construite à l'aide de propositions de base et des connecteurs "non", "ET", "OU", "implique", "est équivalente à". Par exemple

(A OU B) $\Rightarrow$ C est une proposition complexe construite à l'aide des propositions de bases A, B, C. On a alors la propriété suivante :

Régle d'échange : soient P et P' des propositions équivalentes. Soit S une proposition complexe construite à partir de P et d'autres propositions. En remplaçant P par P' dans S, on obtient une proposition complexe équivalente à S.

Preuve : la valeur de vérité de S dépend uniquement de la valeur de vérité des propositions de base et de la manière dont s'enchaînent les connecteurs. En remplaçant P par une proposition qui a la même valeur de vérité, on obtient donc une proposition qui a la même valeur de vérité que S. Si c'est trop abstrait, admettez, et comprenez les exemples.

Exemple Soient x et y des réels et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les propositions P : $x+1 > y+1$ et P' : $x > y$ sont équivalentes. De ce fait, les propositions complexes S et S' suivantes sont équivalentes :
S : $(x + 1 > y + 1$ ET $xy > 0) \Rightarrow f(x) > f(y)$;
S' : $(x > y$ ET $xy > 0) \Rightarrow f(x) > f(y)$.

2.6 Propriétés du ET et du OU

Les propriétés suivantes sont vraies pour n'importe quelles proposition P, Q, R. Elles se démontrent facilement et nous les admettrons pour la plupart.

2.6.1 Distributivité du ET sur le OU et du OU sur le ET

Théorème 1 :
1) **P ET (Q OU R) est équivalent à (P ET Q) OU (P ET R)**
2) **P OU (Q ET R) est équivalent à (P OU Q) ET (P OU R)**
On dit, respectivement, que le ET est *distributif* sur le OU, et que le OU est distributif sur le ET.

Exemple 1 : "Je vais acheter un sandwich ET (je vais acheter une pomme OU je vais acheter une poire)" veut dire la même chose que "(Je vais acheter un sandwich ET je vais acheter une pomme) OU (je vais acheter un sandwich ET je vais acheter une poire)".

Exemple 2 : A : "j'achète un vélo OU (j'achète une voiture ET j'achète un garage)"
est équivalent du point de vue logique à
B : "(j'achète un vélo OU j'achète une voiture) ET (j'achète un vélo OU j'achète un garage)"

En effet B est vraie si j'achète un vélo, B est encore vraie si je n'achète pas de vélo mais que j'achète une voiture et un parking, et B est fausse dans tous les autres cas (verifiez-le !). Il en est de même de A. Les propositions A et B sont donc équivalentes.

Remarque : une manière de prouver, par exemple, que P OU (Q ET R) est équivalent à (P OU Q) ET (P OU R), est de faire la table de vérité de P OU (Q ET R) et de (P OU Q) ET (P OU R), et de constater que ces propositions sont soit toutes les deux vraies, soient toutes les deux fausses. C'est long, mais c'est facile. On obtient :

P	Q	R	Q ET R	P OU (Q ET R)	P OU Q	P OU R	(P OU Q) ET (P OU R)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

On constate bien que la proposition P OU (Q ET R) est vraie si et seulement si la proposition (P OU Q) ET (P OU R) est vraie. Ces deux propositions sont donc bien équivalentes.

2.6.2 Négation du ET

Intuitivement, la négation de "ces deux propositions sont vraies" est "au moins une de ces deux propositions est fausse". Formellement :

Théorème 2 : **La négation de P ET Q est nonP OU nonQ** [6]

Exemples : La négation de "L'homme s'appelle Jean ET la femme s'appelle Sandrine" est "L'homme ne s'appelle pas Jean OU la femme ne s'appelle pas Sandrine".

Soit x un nombre réel. La négation de "$x \geq 0$ ET $x \leq 1$ est "$x < 0$ OU $x > 1$".

2.6.3 Négation du OU

Intuitivement, la négation de "au moins l'une de ces deux proposition est vraie" est "ces deux propositions sont fausses." Formellement :

Théorème 3 : **La négation de "P OU Q" est "nonP ET nonQ"**.[7]

Exemples : la négation de "(je suis né en automne) OU (je suis né au printemps)" est "(je ne suis pas né en automne) ET (je ne suis pas né au printemps)".[8]

[6] Plus précisément, la proposition non(P ET Q) est équivalente à la proposition (non P) OU (non Q). Pour le démontrer, on peut procéder ainsi : la proposition non(P ET Q) est fausse si P et Q sont toutes les deux vraies, et est vraie dans tous les autres cas. De même la proposition nonP OU nonQ est fausse si nonP et nonQ sont toutes les deux fausses, c'est à dire si P et Q sont toutes les deux vraies, et est vraie dans tous les autres cas. Les propositions "non(P ET Q)" et "nonP OU nonQ" sont donc bien équivalentes.

[7] Toujours au sens où la proposition non(P OU Q) est équivalente à la proposition nonP ET nonQ

[8] En bon français, on dirait "je ne suis né ni en automne ni en été". En mathématiques, on ne dit pas "ni A ni B" mais "nonA et nonB".

La négation de “(6 est un multiple de 3) ET (12 est un multiple de 6)" est “(6 n'est pas un multiple de 3) OU (12 n'est pas un multiple de 6)".

Les théorèmes 2 et 3 se généralisent à un nombre quelconque de propositions. Ainsi, si P, Q, R, S sont des propositions, la négation de P OU Q OU R OU S est nonP ET nonQ ET nonR ET nonS ; la négation de P ET Q ET R ET S est nonP OU nonQ OU nonR OU nonS. C'est intuitif : la négation de “au moins une de ces propositions est vraie" est “toutes ces propositions sont fausses". De même, la négation de “toutes ces propositions sont vraies" est “au moins une de ces propositions est fausse".

2.7 Propriétés de l'implication

Théorème 4 : **Si “P implique Q" et “Q implique R", alors “P implique R"** [9]

Preuve : supposons que P implique Q et que Q implique R. Supposons P vraie. Puisque P est vraie et que P implique Q, la proposition Q est vraie. Puisque Q est vraie et que Q implique R, R est vraie. On a bien montré que si P est vraie, alors R est vraie, c'est à dire que P implique R.

Le résultat suivant est très important :

Théorème 5 : **La proposition “Si P alors Q" est équivalente à la proposition “Si nonQ alors nonP".** On dit qu'une implication est équivalente à sa contraposée.

Preuve : Par définition la proposition “Si A alors B" est la proposition “nonA OU B". En appliquant cela à A=nonQ et B=nonP, on voit que la proposition “Si nonQ alors nonP" est la proposition “non(nonQ) OU nonP". Cette proposition est équivalente à “Q OU nonP" et donc à “nonP OU Q" puisque le OU est commutatif. Or la proposition "nonP OU Q" est précisément la proposition "Si P alors Q". La proposition “Si nonQ alors nonP" est donc bien équivalente à la proposition “Si P alors Q".

Exemples : La proposition “Si Pierre a 20 ans, alors Marie à 19 ans" est équivalente à la proposition “Si Marie n'a pas 19 ans, alors Pierre n'a pas 20 ans".

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La proposition “si f est dérivable alors f est continue" est équivalente à la proposition “si f n'est pas continue, alors f n'est pas dérivable".

Le théorème 5 a une conséquence très importante : pour montrer que P implique Q, il suffit de montrer que nonQ implique nonP. En d'autre termes, **au lieu de montrer que si P est vraie alors Q est vraie, on peut montrer que si Q est fausse, alors P est fausse**. C'est la base de ce qu'on appellera le raisonnement “par contraposée".

Théorème 6 : **La négation de “P implique Q" est (P ET nonQ)**

Cela découle du fait que “P implique Q" veut dire “nonP OU Q" et de la règle de négation du OU.

[9] On dit que l'implication est *transitive*.

2.8 Compléments :

2.8.1 Comment montrer que P implique Q ? que P est équivalente à Q ?

D'après la table de $P \Rightarrow Q$, **pour montrer que P implique Q**, il suffit de montrer que si P est vraie alors Q est vraie. En pratique **on suppose que P est vraie et** au terme d'un raisonnement **on montre que Q est vraie.** C'est le raisonnement direct. Une autre méthode est de montrer que nonQ implique nonP (voir théorème 5). On suppose alors que Q est fausse et on montre que P est fausse. C'est le raisonement par contraposée.

Exemple : soient P et Q les propositions suivantes.

P : $3^9 > 20\,000$; Q : $3^{10} > 50\,000$

Montrons que P implique Q de manière directe. Supposons P vraie. Alors $3^9 > 20\,000$, donc $3 \times 3^9 > 3 \times 20\,000$, donc $3^{10} > 60\,000$. Or $60\,000 > 50\,000$ donc $3^{10} > 50\,000$. Donc Q est vraie. On a donc bien montré que si P est vraie, alors Q est vraie. Donc P implique Q.

Montrons maintenant que P implique Q par contraposée. Supposons Q fausse. On a alors $3^{10} \leq 50\,000$, donc $3^{10} \leq 60\,000$; donc, en divisant les deux membres par 3 (qui est strictement positif), $3^9 \leq 20\,000$. Donc P est fausse. On a bien montré que si Q est fausse, alors P est fausse. Donc nonQ implique nonP. Donc P implique Q.

Pour montrer que la proposition P est équivalente à la proposition Q, on montre que P implique Q et que Q implique P.

Pour chaque sens, on a le choix entre une démonstration directe et une démonstration par contraposée. On peut donc montrer, au choix :

- P⇒Q et Q⇒P
- P⇒Q et nonP⇒nonQ
- nonQ⇒nonP et Q⇒P
- nonQ⇒nonP et nonP⇒nonQ

ATTENTION A NE PAS DEMONTRER DEUX FOIS LE MEME SENS ! Par exemple,si vous démontrer que P ⇒ Q et nonQ ⇒ nonP, vous avez démontré deux fois la même chose.

2.8.2 Vocabulaire

Les expressions suivantes veulent dire la même chose :

- Si P est vraie, alors Q est vraie
- P implique Q
- P est une condition suffisante de Q
- Pour que Q soit vraie, il suffit que P soit vraie
- Q est une condition nécessaire de P
- Pour que Q soit fausse, il faut que P soit fausse
- Si Q est fausse, alors P est fausse
- P est vraie seulement si Q est vraie

Les expressions suivantes veulent dire la même chose :

- P est équivalente à Q
- Q est équivalente à P
- P et Q sont équivalentes

- P est vraie si et seulement si Q est vraie
- P est fausse si et seulement si Q est fausse
- P est une condition nécessaire et suffisante de Q

2.8.3 Sens formel et sens courant de l'implication

Du point de vue de la logique, dire que P implique Q veut simplement dire que la proposition nonP OU Q est vraie. On peut donc s'amuser à se demander si P implique Q même si les propositions P et Q n'ont aucun rapport (du point de vue du sens). Par exemple, si P est la proposition : "$2 + 2 = 4$, et Q la proposition : "la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$", il est formellement vrai que P implique Q. En effet, Q est vraie, donc nonP OU Q est vraie, ce qui veut bien dire que P implique Q. On a même que P est équivalente à Q, puisque P et Q sont toutes les deux vraies, et que deux propositions sont équivalentes si et seulement si elles sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses.

En pratique, cependant, se demander si "$2 + 2 = 4$ implique "la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$" n'a qu'un intérêt limité, et on ne considérera jamais de telles implications bizarres. Quand on dira qu'une proposition P implique une proposition Q, on voudra dire en fait, non seulement que la proposition nonP ou Q est vraie, mais que, de plus, on peut déduire la proposition Q de la proposition P de façon relativement directe.

3 Les expressions “pour tout", “il existe"

En mathématiques on considère souvent des énoncés comme “Il existe un réel x tel que $x^2 = 1$", “Pour tout entier naturel n, on a $n^2 \geq n$", “Pour tout réel x non nul, il existe un réel y tel que $xy = 1$", etc. Il est fondamental de comprendre ce que signifient ces énoncés, de savoir les manipuler, et de savoir les nier.

Dans la suite, E désigne un ensemble et $\mathrm{P}(x)$ une expression qui dépend de x, et qui, pour tout élément x de E donné est soit vraie soit fausse. Par exemple, si $E = \mathbb{R}$, $\mathrm{P}(x)$ pourrait être l'expression "$x^2 \geq 2$".

3.1 L'expression “il existe"

En mathématiques, quand on veut dire qu'il y a *au moins un* élément x de l'ensemble E qui vérifie la propriété $\mathrm{P}(x)$, on écrit : “Il existe un élément x de E tel que $\mathrm{P}(x)$"

Exemples : “Il existe un réel x tel que $x^2 = 0$" est une proposition vraie (il y a exactement un réel x tel que $x^2 = 0$, donc il y en a au moins un.)

“Il existe un réel x tel que $x^2 \geq x$" est une proposition vraie (il y a une infinité de réels x tels que $x^2 \geq x$, donc il y en a au moins un)

En revanche, la proposition “Il existe un réel x tel que $x^2 = -1$" est une proposition fausse. En effet, quelque soit la valeur réelle donnée à x, on n'aura jamais $x^2 = -1$.

3.2 L'expression “pour tout"

Soit E un ensemble. En mathématiques, quand on veut dire que pour n'importe quel élément x dans E, la propriété P(x) est vraie, on écrit : “pour tout élément x de E, P(x)"

On peut aussi écrire, avec le même sens : “pour tout élément x de E, on a P(x)".

Exemples : “Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$" est une proposition vraie. En effet, il n'existe aucun nombre réel dont le carré soit strictement négatif.

“Pour tout réel x, $x^2 \geq x$" est une proposition fausse. Bien sûr il existe des réels qui sont plus petits que leur carré. Il en existe même une infinité. Mais on peut trouver des réels qui sont strictement plus grands que leur carré, par exemple 1/2. Donc la proposition est fausse.

La proposition “Pour tout réel x, $x^2 > 0$" est fausse. En effet, pour $x = 0$, on n'a pas $x^2 > 0$.

Remarque : Les expressions “il existe un réel x", “il existe x dans $\mathbb{R}$" et “il existe un élément x de $\mathbb{R}$" veulent dire la même chose. De même, les expressions “pour tout réel x", “pour tout x dans $\mathbb{R}$" et “pour tout élément x de $\mathbb{R}$" veulent dire la même chose.

3.3 Variable muette

Considérons les expressions suivantes :

“il existe un réel x tel que $x^2 = 1$"

“il existe un réel y tel que $y^2 = 1$"

“il existe un réel z tel que $z^2 = 1$" “Il existe un réel $schtroumpf$ tel que $(schtroumpf)^2 = 1$"

Ces expressions veulent toutes dire la même chose : qu'il existe un réel dont le carré vaut 1. De même les expressions

“pour tout réel x, on a $x^2 \geq 0$"

“pour tout réel y, on a $y^2 \geq 0$"

“pour tout réel z, on a $z^2 \geq 0$"

veulent toutes dire la même chose (qu'il n'y a aucun réel dont le carré est -1).

Plus généralement, **si dans un énoncé comprenant une variable x, on remplace partout x par un autre symbole, on ne change pas le sens de l'énoncé.** Pour dire que le fait qu'on utilise x comme variable plutôt que y ou z ne change pas le sens de la proposition, on dit que la variable est *muette*.

3.4 Un point de vocabulaire

Les expressions “Il existe" et “Pour tout" précisent la quantité d'éléments qu'on considère (au moins un élément ; tous les éléments). Pour cette raison on les appelle des **quantificateurs**.

3.5 Négation de propositions comprenant un quantificateur

Intuitivement, la négation de "Tous les éléments de l'ensemble E vérifient la propriété P" est "Il y a au moins un élément de E qui ne vérifie pas P". Formellement :

La négation de “Pour tout élément x de E, on a P(x)" est “Il existe un élément x de E tel que nonP(x)"

Exemple : La négation de “pour tout entier naturel n, on a $n^2 \geq n$" est “il existe un entier naturel n tel que $n^2 < n$".

Intuitivement, la négation de "Il y a au moins un élément de E pour lequel la propriété P est vraie" est "Pour tous les éléments de E, la propriété P est fausse". Formellement :
La négation de “Il existe un élément x de E tel que P(x)" est “Pour tout élément x de E, nonP(x)"

Exemple : La négation de la proposition “Il existe un réel x tel que $x^2 = 0$" est “Pour tout réel x, non($x^2 = 0$)" c'est à dire “Pour tout réel x, $x^2 \neq 0$"

La régle à retenir est la suivante :

Règle 7 : **Pour nier une expression commençant par “il existe" on transforme le “il existe" en “pour tout" et on nie ce qui suit. Pour nier une expression commençant par “pour tout", on transforme le “pour tout" en “il existe" et on nie ce qui suit.**

3.6 Règles sur le OU et le ET

On admet les règles suivantes :

Théorème 8 : **La proposition “Pour tout x dans E, on a P(x) ET Q(x)" est équivalente à “(Pour tout x dans E, on a P(x)) ET (Pour tout x dans E, on a Q(x))"**

Exemple (informel) : “Tous les étudiants de l'amphi vont acheter un sandwich et une boisson" veut dire la même chose que “Tous les étudiants de l'amphi vont acheter un sandwich ET tous les étudiants de l'amphi vont acheter une boisson".

Théorème 9 : **La proposition “Il existe x dans E tel que [P(x) OU Q(x)]" est équivalente à “[Il existe x dans E tel que P(x)] OU [il existe x dans E tel que Q(x)]"**

Exemple (informel) : “Au moins un étudiant de l'amphi va acheter un pain au chocolat OU un croissant" veut dire la même chose que “au moins un étudiant de l'amphi va acheter un pain au chocolat" OU “au moins un étudiant de l'amphi va acheter un croissant"[10]

Théorème 10 : **Si “[pour tout x dans E, P(x)] OU [pour tout x dans E, Q(x)]" alors “Pour tout x dans E, [P(x) OU Q(x)]". La réciproque est fausse.**

Exemple : Si tous les étudiants achètent des pommes OU tous les étudiants achètent des poires, alors tous les étudiants achètent des fruits (poires ou pommes).

[10]Bien se rappeler que le OU est inclusif.

Pour voir que la réciproque est fausse, imaginez que tous les étudiants achètent des fruits (pommes ou poires), mais que certains étudiants n'achètent que des poires et d'autres uniquement des pommes. Alors "tous les étudiants achètent des poires OU des pommes" est vraie, mais "tous les étudiants achètent des pommes OU tous les étudiants achètent des poires" est faux.

Théorème 11 : **S'il existe x dans E tel que (P(x) ET Q(x)), alors il existe x dans E tel que P(x) ET il existe x dans E tel que Q(x)**. La réciproque est fausse.

Exemple : s'il existe un étudiant qui a la 20 en analyse et qui a 20 en algèbre, alors il existe un étudiant qui a 20 en analyse ET il existe un étudiant qui a 20 en algèbre. La réciproque est fausse : ce n'est pas parce qu'il y a un étudiant qui a 20 en analyse et un étudiant qui a 20 en algèbre qu'il y a un étudiant qui a 20 dans les deux matières.

3.7 Enoncés avec l'ensemble vide

Par définition, l'ensemble vide, noté $\emptyset$, est un ensemble qui n'a aucun élément.

Une proposition du type "Il existe un élément x de l'ensemble vide qui vérifie la propriété P(x)" est toujours fausse. En effet, si jamais un tel élément x existait, ce serait un élément de l'ensemble vide. L'ensemble vide aurait donc au moins 1 élément, ce qui est faux par définition.

De même une proposition du type "Pour tout élément de l'ensemble vide, on a P(x)" est toujours vraie. En effet, pour que cette proposition soit fausse, il faudrait qu'il existe un élément x de l'ensemble vide tel que P(x) ne soit pas satisfaite. Mais alors, cet élément x serait un élément de l'ensemble vide, et donc l'ensemble vide aurait au moins un élément. Ce n'est pas le cas, par définition.

3.8 Enoncés avec plusieurs quantificateurs

On en rencontre très souvent. Ils font un peu peur au début, mais on les domestique avec le temps. En voici des exemples :

"Pour tout réel x négatif ou nul, pour tout réel y positif ou nul, $xy \leq 0$"

"Pour tout réel x, il existe un entier naturel n tel que $n \leq x < n+1$"

"Il existe un réel x tel que, pour tout réel y, $xy = 0$"

3.8.1 Négation d'énoncés avec plusieurs quantificateurs

Pour nier une proposition contenant plusieurs quantificateurs, il suffit d'appliquer la règle 7 plusieurs fois (voir exemple ci-dessous). En pratique, on applique directement la règle suivante, qu'on admettra :

Règle 12 : **Pour nier une proposition qui contient plusieurs quantificateurs, on transforme les "pour tout" en "il existe", les "il existe" en "pour tout" et on nie la conclusion.**

Cette règle est très importante et il faut la connaître parfaitement.

Exemple : Supposons qu'on veuille nier la proposition

P : “Pour tout réel x, il existe un réel y tel que $xy = 1$"

Première méthode : en utilisant la règle 7 plusieurs fois.

Appelons Q(x) l'expression : “il existe un réel y tel que $xy = 1$". La proposition P peut se réécrire :
P : “Pour tout réel x, Q(x)"
D'après la règle 7, sa négation est :
nonP : “Il existe un réel x tel que nonQ(x)"
Pour terminer il suffit donc de nier Q(x). D'après la règle 7, la négation de Q(x) est :
nonQ(x) : “Pour tout réel y, non($xy = 1$)"
c'est à dire : “Pour tout réel y, $xy \neq 1$". On obtient donc finalement pour la négation de P :
nonP : “Il existe un réel x tel que, pour tout réel y, $xy \neq 1$"

Deuxième méthode : en utilisant la règle 12

On veut nier la proposition P : “Pour tout réel x, il existe un réel y tel que $xy = 1$". La règle 12 dit qu'il faut transformer les “pour tout" en “il existe", les “il existe" en “pour tout" et nier la conclusion. On obtient donc :
nonP : “Il existe un réel x tel que, pour tout réel y, non($xy = 1$)"
c'est à dire
nonP : “Il existe un réel x tel que, pour tout réel y, $xy \neq 1$"

Pour vérifier que vous suivez : que veut dire la proposition P ci-dessus ? Est-elle vraie ? La réponse est dans la note de bas de page.[11]

Autre exemple : soient A, B, C des ensembles. Supposons qu'on veuille nier une proposition du type :
P : “Il existe a dans A tel que, pour tout b dans B, il existe c dans C tel que $Q(a, b, c)$"
où $Q(a, b, c)$ est une expression qui, pour toutes valeurs données à a, b et c, est une proposition. Ca paraît assez casse-tête mais en fait, avec un peu d'habitude, c'est très facile.

Première méthode : en appliquant la règle 7 plusieurs fois. On obtient dans l'ordre les expressions suivantes pour nonP :
Etape 1 : Pour tout a dans A, non[pour tout b dans B, il existe c dans C tel que $Q(a, b, c)$]
Etape 2 : Pour tout a dans A, il existe b dans B tel que, non[il existe c dans C tel que $Q(a, b, c)$]
Etape 3 : Pour tout a dans A, il existe b dans B tel que, pour tout c dans C, non$Q(a, b, c)$.

Deuxième méthode : en appliquant la règle 12. On obtient directement la proposition de l'étape 3 ci-dessus. Rappelons qu'en pratique, on applique toujours directement la règle 12.

3.8.2 Enchaînement des quantificateurs

Considérons une proposition avec plusieurs quantificateurs comme :

[11] La proposition P veut dire que tous les réels ont un inverse. C'est faux, car 0 n'a pas d'inverse.

Q : “Pour tout réel x, il existe un entier naturel n tel que $n \leq x < n+1$"

Considérons la proposition suivante, obtenue à partir de Q en intervertissant “Pour tout réel x" et “il existe un entier naturel n tel que" :

R : “Il existe un entier naturel n tel que, pour tout réel x, $n \leq x < n+1$"

Les propositions Q et R sont elles équivalentes ? Y-en-a-t-il une qui implique l'autre ? Cette section répond à ce type de questions.

Théorème 13 : Soient Q et R les propositions suivantes :
Q : “Pour tout élément x de E, pour tout élément y de F, on a $\mathrm{P}(x,y)$"
R : “Pour tout élément y de F, pour tout élément x de E, on a $\mathrm{P}(x,y)$"
Les propositions Q et R sont équivalentes.
On dit qu'on peut intervertir deux “pour tout" qui se suivent. De même :

Théorème 14 : Soient Q' et R' les propositions suivantes :
Q : “Il existe un élément x de E tel que : il existe un élément y de F tel que $\mathrm{P}(x,y)$"
R : “Il existe un élément y de F tel que : il existe un élément x de E tel que $\mathrm{P}(x,y)$"
Les proposition Q et R sont équivalentes.

On dit qu'on peut intervertir deux “il existe" qui se suivent.

Remarque : à la place de la formulation assez lourde de Q ou de R, on écrit plutôt : “il existe x dans E et y dans F tels que $\mathrm{P}(x,y)$"

Théorème 15 : considérons les propositions suivantes
Q : “Pour tout x dans E, il existe y dans F tel que P(x,y)"
R : “Il existe y dans F tel que, pour tout x dans E, P(x,y)"
R implique Q, mais en général Q n'implique pas R.

On dit qu'**on ne peut pas intervertir un “pour tout" et un “il existe"**. Pour comprendre ce résultat, considérons l'exemple suivant. Soit E l'ensemble des épreuves des derniers jeux olympiques. Soit F l'ensemble des athlètes. Considérons les propositions suivantes :

P : “Pour toute épreuve y, il existe un athlète x tel que l'athlète x a remporté l'épreuve y"

Q : “Il existe un athlète x tel que, pour toute épreuve y, l'athlète x a remporté l'épreuve y"

Dans la proposition P, l'athlète x qui a remporté l'épreuve y dépend de y. Par exemple, si y est l'épreuve du 100m masculin, x est le vainqueur du 100m masculin ; si y est l'épreuve du saut à la perche féminin, x est la gagnante du saut à la perche féminin, et il y a peu de chances que ce soit la même personne !

La proposition P signifie donc que chaque épreuve a été remporté par au moins un athlète, ce qui est normal. En revanche, dans la proposition Q, l'athlète x est le même pour toute les épreuves y. La proposition Q signifie donc qu'il y a un athlète qui a remporté toutes les épreuves. Quel super-champion !

Voici un exemple plus mathématique :

P : “Pour tout réel x, il existe un réel y tel que $y > x$"

Q : “Il existe un réel y tel que, pour tout réel x, $y > x$".

La proposition P signifie que si on fixe un nombre réel x, on peut trouver un nombre réel y strictement plus grand que x. C'est vrai, il suffit de prendre $y = x + 1$. En revanche, la proposition Q signifie qu'il y a un nombre réel qui est strictement plus grand que tous les autres réels. C'est bien entendu faux.

La règle à retenir est la suivante : **on peut intervertir deux “pour tout" qui se suivent ou deux “il existe" qui se suivent sans changer le sens de la proposition. En revanche, on ne peut pas intervertir un “pour tout" et un “il existe".** C'est très important !

Remarques :

• Quand on dit qu'il existe un réel x et un réel y tel que blah blah blah, le x et le y peuvent être le même. Ainsi, la proposition : "Il existe u n réel x et un réel y tels que $x^2 + y^2 = 0$" est vraie, bien que les seuls valeurs qui marchent pour x et y soient $x = y = 0$.

• pour bien indiquer que dans la proposition “Pour tout élément x de E, il existe un élément y de F tel que P(x,y)" l'élément y n'est pas à priori le même pour tous les x, certains écrivent :

“Pour tout élément x de E, il existe un élément y_x de F tel que $P(x, y_x)$"

L'inconvénient est que quand on veut nier la proposition écrite sous cette forme, il ne faut pas seulement changer le “pour tout" en “il existe" et le “il existe" en “pour tout", mais aussi remplacer y_x par y tout court.

3.9 Ecriture formalisée

3.9.1 Les symboles

Dans les formules :

• x est un élément de E s'écrit $x \in E$

• “pour tout" s'écrit “$\forall$" (“$\forall$" se lit soit “pour tout", soit "quel que soit")

• “il existe" s'écrit “$\exists$"

Ces symboles sont compris par tous les mathématiciens du monde.

Exemples :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

se lit : “Pour tout élément x de $\mathbb{R}$, on a $x^2 > 0$"

$$\exists x \in R, x^2 = 0$$

se lit : “Il existe un élément x de $\mathbb{R}$ tel que $x^2 = 0$"

Exemples avec plusieurs quantificateurs :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y=0$$

se lit : “pour tout élément x de $\mathbb{R}$, il existe un élément y de $\mathbb{R}$ tel que $x+y=0$."

On pourrait dire aussi, avec le même sens : “pour tout réel x, il existe un réel y tel que $x+y=0$." Cela signifie que tout nombre réel a un opposé, ce qui est bien sûr vrai.

La proposition

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x+y=0$$

se lit : “il existe un élément y de $\mathbb{R}$ tel que, pour tout élément x de $\mathbb{R}$, $x+y=0$"

On pourrait dire aussi : “il existe un réel y tel que, pour tout réel x, $x+y=0$". Cela signifie qu'il existe un réel y tel que tous les nombres réels sont égaux à $-y$, ce qui est bien sûr faux.

La proposition

$$\exists x \in R, \exists y \in R, xy < 0$$

se lit : “il existe un x dans $\mathbb{R}$ et il existe un y dans $\mathbb{R}$ tels que $xy < 0$"

C'est vrai, par exemple $x = 1$ et $y = -1$. La proposition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \geq 0$$

se lit : “pour tout x dans $\mathbb{R}$, pour tout y dans $\mathbb{R}$, on a $xy \geq 0$". Cela veut dire que le produit de deux nombres réels est toujours positif. C'est bien entendu faux.

Règles de lecture des virgules dans les formules :

La virgule après “$\exists$" se lit “tel que". La virgule après un “$\exists$" qui précède immédiatement un autre “$\exists$" peut aussi se lire “et".

La virgule après “$\forall$" se lit “on a" ou ne se lit pas. La virgule après un “$\forall$" qui précède immédiatement un autre “$\forall$" peut aussi se lire “et".

3.9.2 Règles de manipulation de “$\forall$" et “$\exists$"

Les règles de manipulation de “$\forall$" et “$\exists$" se déduisent des règles de manipulation de “pour tout" et de “il existe" :

Interversion de “ $\forall$ " et de “ $\exists$ " : intervertir deux “$\forall$" qui se suivent ou deux “$\exists$" qui se suivent ne modifie pas le sens d'un énoncé. **Si un énoncé comprend un “$\forall$" et un “$\exists$", l'ordre dans lequel ils apparaissent est fondamental.**

Négation d'énoncés contenant “$\exists$" ou “$\forall$".

Soit E un ensemble. La négation de

$$\forall x \in E, P(x)$$

est

$$\exists x \in E, nonP(x)$$

La négation de

$$\exists x \in E, P(x)$$

est

$$\forall x \in E, nonP(x)$$

Plus généralement, on a la règle suivante : **pour nier un énoncé comprenant des "$\forall$" et des "$\exists$", on transforme les $\forall$ en $\exists$, les $\exists$ en $\forall$ et on nie la conclusion.**

Exemple : la négation de

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$$

est

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \neq 0$$

La négation de

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \geq 0$$

est

$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, xy < 0$$

(ceci exprime la propriété suivante : la négation de "le produit de deux nombres réels est toujours positif ou nul" est "il existe deux nombres réels dont le produit est strictement négatif").

3.10 Négation de propositions contenant des quantificateurs et des implications.

Soit E un ensemble. Pour nier une proposition du type

A : "Pour tout x dans E, si P(x) alors Q(x)"

on procède en deux temps. Premier temps : appelons R(x) l'expression

R(x) : "si P(x) alors Q(x)".

La proposition A se réécrit alors :

A : "Pour tout x dans E, R(x)"

et sa négation est :

nonA : "Il existe x dans E tel que nonR(x)"

Il ne reste plus qu'à exprimer la négation de R(x). Mais la négation de "Si P alors Q" est "P ET nonQ". La négation de A est donc :

nonA : "Il existe x dans E tel que (P(x) ET nonQ(x))"

Exemple : Considérons la proposition suivante : "Pour tout réel x, si $x \geq 2$ alors $x^2 \geq 9$". Sa négation est : "Il existe un réel x tel que $x \geq 2$ et $x^2 < 9$".

On retient : **la négation de "pour tout x dans E, si P(x) alors Q(x)" est "il existe x dans E tel que (P(x) ET nonQ(x))"**.

En écriture formalisée, cette propriétés se transpose ainsi :

La négation de

$$\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$$

est

$$\exists x \in E, P(x) \text{ ET non} Q(x)$$

Attention : prendre la négation d'un énoncé comprenant une implication est parfois difficile parce que l'énoncé de départ est en fait incomplet.

Exemple : soit E un ensemble et A et B des sous-ensembles de E. On peut accepter l'enoncé suivant (incomplet) qui définit l'inclusion de A dans B :

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Mais si on veut écrire que A n'est pas inclus dans B, il faut d'abord réécrire l'enoncé complet :

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Puis nier les deux membres de l'équivalence :

$$\text{non}(A \subset B) \Leftrightarrow (\exists x \in E, x \in A \text{ ET } x \notin B)$$

3.11 Les signes "$\exists$" et "$\forall$" ne s'utilisent que dans les formules.

Ces signes ne sont pas des abbréviations. Il faudrait plutôt les considérer comme appartenant à une autre langue, la langue mathématique.

Ne jamais utiliser les symboles $\forall$ et $\exists$ dans des phrases en français.

Un énoncé comme : "$\forall$ réel x, $\exists$ réel y tel que $x + y = 0$" n'est pas correct et sera sanctionné. C'est un peu comme si vous écriviez : "For all réel x, there exists un réel y tel que $x + y = 0$". Ca ferait bizarre !

Enoncés corrects :
"Pour tout réel x, il existe un réel y tel que $x + y = 0$"
"Pour tout réel x dans $\mathbb{R}$, il existe y dans $\mathbb{R}$ tel que $x + y = 0$"
"$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$"

Enoncés acceptables mais à éviter :
"Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y = 0$"
"$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y = 0$"
"$\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geq 0$"

Enoncés inacceptables :
"$\forall$ réel x, $\exists$ un réel y, $x + y = 0$"
"$\forall$ réel x, $\exists$ réel y tel que $x + y = 0$"
"$\forall$ x dans $\mathbb{R}$, $\exists$ y dans $\mathbb{R}$, $x + y = 0$"
Etc.

3.12 “il existe au plus un", “il existe un unique"

On a vu qu'en mathématiques, “il existe" veut dire la même chose qu'“il existe au moins un", c'est à dire “il y a un, deux, ou davantage". On utilisera aussi d'autres expressions proches mais différentes et dont il faut connaitre le sens :

“Il existe au plus un élément x de E tel que P(x)" signifie que le nombre d'élément de E tels que P(x) est vraie est égal à 0 ou à 1 (mais pas 2, ni plus que 2).

Exemples : “il existe au plus un réel x tel que $x^2 = 0$" est une proposition vraie (le nombre de réels dont le carré est nul est égal à un, donc à zéro ou un).

“Il existe au plus un réel x tel que $x^2 < 0$" est aussi une proposition vraie (il n'y a pas de réels dont le carré est nul, donc il y en a zéro, donc il y en a zéro ou un).

“Il existe au plus un réel x tel que $x^2 = 1$" est une proposition fausse.

“Il existe au plus un réel x tel que $x^2 \geq 0$" est aussi une proposition fausse.

“Il existe un unique élément x de E tel que P(x)" signifie : le nombre d'éléments x de E tels que P(x) est vraie est exactement égal à 1. En d'autres termes, “Il existe un unique" veut dire “il existe au moins un ET il existe au plus un".

Exemples :

“il existe un unique réel x tel que $x^2 = 0$" est une proposition vraie.

“il existe un unique réel x tel que $x^2 = 1$" est une proposition fausse (il en existe 2).

“il existe un unique réel x tel que $x^2 = -1$" est une proposition fausse (il n'en existe aucun).

Négation :

La négation de “il existe" (sous entendu : “il existe au moins un") est “il n'existe aucun".[12]

La négation de “il existe au plus un" est “il existe au moins deux".

La négation de “il existe un unique" est “il existe zéro OU il existe au moins deux".

Symboles :

Nous éviterons le plus possible d'utiliser les symboles pour “il existe au plus un" et pour “il existe un unique". Cependant, vous les rencontrerez peut-être dans des livres. Le symbole pour “il existe au plus un" est “!" ; le symbole pour “il existe un unique" est “ $\exists!$ ". Par exemple : “$\exists! n \in \mathbb{N}, n^2 = 4$" se lit : “il existe un unique entier naturel n tel que $n^2 = 4$".

Comme “$\forall$" et “$\exists$", les symboles “!" et “$\exists$!" ne s'utilisent que dans des formules.

[12]Plus précisément, la négation de “il existe x dans E tel que P(x)" se dit en français “il n'existe aucun x dans E tel que P(x)" ou bien “pour tout x dans E, nonP(x)". Cette deuxième version est préférable parce qu'elle est plus proche de l'écriture formelle : $\forall x \in E, nonP$(x).