Injections et surjections dans la vie quotidienne : solutions.

Romina dispose de colliers et de boîtes. On note E l'ensemble des colliers et F celui des boîtes. On suppose ces ensembles finis. Romina met chaque collier dans une boîte (elle peut mettre plusieurs colliers dans la même boîte et peut laisser certaines boîtes vides). Si x est un collier, on note $f(x)$ la boîte dans laquelle Romina met le collier x. Cela définit une application f de E dans F. On considère la situation une fois les colliers mis dans les boîtes et on cherche à traduire en termes concrets les propriétés éventuelles de f. Par exemple, $Card\, f(E) = 1$ veut dire que tous les colliers ont été mis dans la même boîte ; dire que f est injective signifie que chaque boîte contient au plus un collier, etc.

Exercice 1 *Traduire en termes concrets les propositions suivantes, comme dans l'exemple :*

1a) f n'est pas injective : il y a au moins une boîte qui contient plusieurs colliers ("plusieurs" signifiant 2 ou plus).

1b) f est surjective : chaque boîte contient au moins un collier.

1c) f n'est pas surjective : il y a au moins une boîte vide.

1d) f est bijective : chaque boîte contient exactement un collier.

1e) f n'est pas bijective : il y au moins une boîte vide ou une boîte qui contient plusieurs colliers.

En considérant toujours la situation une fois les colliers mis dans les boîtes, on s'intéresse maintenant à des propriétés sur les cardinaux. Par exemple, la proposition "Si $Card\, E < Card\, F$, alors la fonction f ne peut pas être surjective" exprime simplement le fait que s'il y a strictement moins de colliers que de boîtes, alors il y a au moins une boîte qui ne contient aucun collier.

Exercice 2 *Traduire en termes concrets les propositions suivantes :*

2a) Si $Card\, E > Card\, F$, alors la fonction f ne peut pas être injective : s'il y a plus de colliers que de boîtes, il y a au moins une boîte qui contient plusieurs colliers.

2b) Si $Card\, E = Card\, F$, alors f est injective ssi f est surjective : s'il y a autant de colliers que de boîtes, alors : si chaque boîte contient au plus un collier, il n'y a aucune boîte vide, et réciproquement, si aucune boîte n'est vide, c'est que chaque boîte contient au plus un collier (en fait exactement un).

2c) $Card\, f(E) \leq Card\, E$: le nombre de boîtes qui contiennent un collier est inférieur ou égal au nombre de colliers.

2d) f est injective ssi $Card\, f(E) = Card\, E$: s'il y a autant de boîtes qui contiennent un collier que de colliers, alors aucune boîte ne contient plusieurs colliers, et réciproquement.

En plus de ses colliers et de ses boîtes, Romina dispose de tiroirs, dont l'ensemble est noté G. Après avoir mis les colliers dans les boîtes, Romina met chaque boîte (vide ou non) dans un tiroir (elle peut mettre plusieurs boîtes dans le même tiroir et peut laisser certains tiroirs vides). On considère la situation une fois le rangement terminé. Si y est une boîte, on note $g(y)$ le tiroir où Romina a rangé la boîte y. Cela définit une application g de F dans G. On dit qu'un tiroir contient le collier x s'il contient une boîte qui contient le collier x ; en d'autres termes, le collier x se trouve dans le tiroir $g \circ f(x)$.

Exercice 3 *Traduire en terme concret les résultats suivants (vus en cours) :*

3a) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective : si aucun tiroir ne contient plusieurs colliers, alors aucune boîte ne contient plusieurs colliers (en effet, si une boîte contenait plusieurs colliers, alors le tiroir qui contient cette boîte contiendrait plusieurs colliers). On peut dire aussi : si dans chaque tiroir il y a au plus un collier, alors dans chaque boîte il y a au plus un collier.

3b) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective : si chaque tiroir contient au moins un collier, c'est que chaque tiroir contient au moins une boîte.

3c) Si f et g sont toutes deux injectives, alors $g \circ f$ est injective : si dans chaque boite il y a au plus un collier et dans chaque tiroir au plus une boîte, alors dans chaque tiroir il y a au plus un collier. Cela se comprend peut-être plus facilement ainsi : si dans chaque tiroir il y a au plus une boîte et dans chaque boîte au plus un collier, alors dans chaque tiroir il y a au plus un collier. On peut dire également : si aucune boîte ne contient plusieurs colliers et aucun tiroir ne contient plusieurs boîtes, alors aucun tiroir ne contient plusieurs colliers. On peut dire encore : si deux colliers différents sont toujours mis dans des boîtes différentes, et si deux boîtes différentes sont toujours mis dans des tiroirs différents, alors deux colliers différents se retrouveront toujours dans des tiroirs différents.

3d) Si f et g sont toutes deux surjectives, alors $g \circ f$ est surjective : si dans chaque boîte il y a au moins un collier et dans chaque tiroir au moins une boîte, alors dans chaque tiroir il y a au moins un collier. Cela se comprend peut-être plus facilement ainsi : si dans chaque tiroir il y a au moins une boîte, et dans chaque boîte au moins un collier, alors dans chaque tiroir il y a au moins un collier.

Si vous détectez des fautes de frappe qui gênent la compréhension, merci de les signaler à l'adresse viossat at ceremade point dauphine point fr.