Deux preuves de la formule de Taylor

Proposition. Soit n un entier naturel. Soit $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré au plus n. Soit $a \in K$. Pour $k > n$, on pose $a_k = 0$. On a :

1) Pour tout entier naturel k, $P^{(k)}(0) = k!a_k$

2) $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$

3) $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$

Première preuve

Preuve de 1) . On fait une récurrence sur k. Soit H_k la propriété : pour tout polynôme P, $P^{(k)}(0) = k!a_k$, où a_k est le coefficient de degré k de P.

Initialisation : soit P un polynôme quelconque. Pour $k = 0$, on a $P^{(0)}(0) = P(0) = a_0 = 0!a_0$ (on rappelle que par convention $0! = 1$). Donc H_0 est vraie.

Hérédité : supposons H_k vraie. Notons b_k le coefficient de degré k du polynôme dérivé P'. Par définition de P', $b_k = (k+1)!a_{k+1}$ et $P'^{(k)} = P^{(k+1)}$. Mais par hypothèse de récurrence appliquée à P', $P'^{(k)}(0) = k!b_k$. Donc $P^{(k+1)}(0) = k!(k+1)a_{k+1} = (k+1)!a_{k+1}$. Donc H_{k+1} est vraie.

Par récurrence, H_k est donc vraie pour tout entier naturel k.

Preuve de 2). D'après le 1), le coefficient de degré k de P est $\frac{P^{(k)}(0)}{k!}$. Ceci implique 2).

Preuve de 3). Soit $Q = P(X + a)$. On a donc aussi $P = Q(X - a)$. De plus, d'après la formule sur la dérivée d'un polynôme composé, on a $Q' = P'(X + a) \times 1 = P'(X + a)$, d'où l'on déduit, par une récurrence que je saute, que pour tout entier nature k, $Q^{(k)} = P^{(k)}(X + a)$, donc $Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(a)$. En appliquant la formule du 2) au polynôme Q, on obtient $Q = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} X^k$ donc $Q(X - a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} (X - a)^k$. En remplaçant $Q(X - a)$ par P et $Q^{(k)}(0)$ par $P^{(k)}(a)$, on obtient exactement l'égalité du 3).

Seconde preuve (explications brèves)

On commence par prouver 3). Pour cela, on fait une récurrence sur n. Soit H_n la propriété : la formule du 3) est vraie pour tous les polynômes de degré au plus n.

Initialisation : H_0 est vraie car pour un polynôme de degré au plus 0 (c'est à dire pour un polynôme constant), on a bien $P = P(0)$.

Hérédité : supposons H_n vraie. Soit P un polynôme de degré $n + 1$. En appliquant la formule à P' (qui est bien de degré au plus n), puis en intégrant (c'est à dire en exprimant que $P' = Q'$ ssi $P - Q$ est constant), on obtient qu'il existe une constante C telle que $P = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k + C$. En prenant la valeur au point a, on montre que $C = P(a)$, d'où $P(X) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$. Donc H_{n+1} est vraie. Donc H_n est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc montré le 3). On en déduit le 2) en considérant le cas particulier $a = 0$. Enfin, puisque deux polynômes sont égaux ssi leurs coefficients sont les mêmes, on déduit du 2) que $P^{(k)}(0) = k!a_k$ pour $k \leq n$. Pour $k > n$ c'est évident car les deux membres sont nuls. Ceci prouve le 1).

Ce qu'il faut retenir : la formule bien sûr, mais aussi l'idée de faire une récurrence sur le degré du polynôme en appliquant l'hypothèse de récurrence au polynôme dérivé.