

Construction de l'ensemble des nombres complexes

Lorsqu'on vous a introduit l'ensemble des complexes en terminale, on vous a demandé d'admettre un résultat du type suivant :

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ appelé ensemble des nombres complexes et vérifiant :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ (ce qui signifie que si on additionne deux nombres réels au sens de l'addition définie sur $\mathbb{R}$ ou au sens de l'addition définie sur $\mathbb{C}$, cela donne le même résultat, et même chose pour la multiplication).
- Il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i , dont le carré vaut -1
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$ où x et y sont des réels.
- si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, où x, x', y, y' sont des réels, alors :

$$z + z' = (x + x') + i(y + y') \text{ et } zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Le but de ce document est de vous montrer comment on peut construire un tel ensemble à partir de l'ensemble des réels. Ceci n'a qu'un intérêt théorique. En pratique, nous n'utiliserons pas la construction de $\mathbb{C}$, mais seulement les propriétés ci-dessus.

Résumé de ce qui va suivre : rappelons que $\mathbb{R}^2$ désigne l'ensemble des couples de réels. Nous allons définir l'ensemble des complexes comme étant l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni d'une addition naturelle mais d'une multiplication un peu bizarre. Nous allons ensuite assimiler le réel x et le couple $(x, 0)$, noter i le couple $(0, 1)$ et vérifier que les propriétés précédentes sont satisfaites.

Allons y :

1) Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on définit une addition, notée $+$, et une multiplication, noté $.$, en posant, pour tout couple de réels (x, y) et tout couple de réels (x', y') :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad (x, y).(x', y') = (xx' - yy', xy + x'y)$$

On appelle ensemble des nombres complexes et on note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de ces opérations.

2) Soit z un complexe. D'après la définition ci-dessus, il existe des réels x et y uniques tels que $z = (x, y)$. On appelle partie réelle de z le réel x et on appelle partie imaginaire de z le réel y . On assimile le réel x et le complexe de partie réelle x et de partie imaginaire nulle. On assimile donc $\mathbb{R}$ à l'ensemble des couples de la forme $(x, 0)$ où x est un réel. En ce sens, nous pouvons maintenant considérer que $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.

De plus, on remarque que pour tous réels x et x' , on a : $(x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0)$ et $(x, 0) \cdot (x', 0) = (x \cdot x', 0)$. Il s'ensuit que si z et z' sont des complexes de partie imaginaire nulle (donc des réels), qu'on les additionne en tant que réels ou en tant que complexes, cela donne le même résultat. De même, qu'on les multiplie en tant que complexes ou en tant que réels, cela donne le même résultat. On dit que les opérations de $\mathbb{C}$ prolongent celles de $\mathbb{R}$.

3) On note i le couple $(0, 1)$. D'après les règles de calcul précédentes, pour tout complexe z , il existe un unique couple de réels (x, y) tels que $z = x + iy$. De plus, x est la partie réelle de z et y sa partie imaginaire.

4) On vérifie que $i^2 = -1$. En effet :

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \times 0 - 1 \times 1, 0 \times 1 + 0 \times 1) = (-1, 0) = -1$$

Tout nombre complexe z peut donc s'écrire de manière unique sous la forme $z = x + iy$, où x et y sont des réels. De plus, on vérifie que d'après les règles de calculs précédentes, on a, pour tous réels x, y, x', y' :

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y') \quad \text{et} \quad (x + iy) \cdot (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Voilà, c'est fait. On a défini un ensemble $\mathbb{C}$ qui a toutes les propriétés désirées. A partir de là, on étudie les propriétés de $\mathbb{C}$ comme en terminale.

Remarque : il y a d'autres manières de construire les nombres complexes, mais la méthode exposée ci-dessus est sans doute la plus simple.