Corrigé du partiel d'algèbre 1 du 13 novembre2007

Exercice 1 : 1) faux (contre-exemple : $E = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$) ; 2) vrai ; 3) vrai aussi (dans le cours, f allait de E dans F et g de F dans G, donc on ne pouvait pas considérer $f \circ g$, mais ici on peut puisque f et g vont de E dans E) ; 4) faux (voir contre exemple dans le cours) ; 5) faux (contre-exemple : $E = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $g(x) = x$)

Exercice 2 C'est vrai (vu en cours). Montrons-le par double inclusion.

Montrons tout d'abord $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. Soit y dans $f(A \cup B)$. Par définition de $f(A \cup B)$, il existe x dans $A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$ donc $f(x) \in f(A) \cup f(B)$. Sinon, $x \in B$ et de même $f(x) \in f(A) \cup f(B)$. Donc dans tous les cas, $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$. Donc $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Réciproquement, montrons que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$. On a $A \subset A \cup B$, donc $f(A) \subset f(A \cup B)$. De même, $f(B) \subset f(A \cup B)$. Donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$. Donc par double inclusion, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 3

1) On n'a pas $\cos 0 \leq \cos(\frac{\pi}{2})$, donc on n'a pas $0 \,\mathcal{R}\, (\frac{\pi}{2})$. On n'a pas $\cos(\frac{\pi}{3}) \leq \cos(\pi)$, donc on n'a pas $(\frac{\pi}{3}) \,\mathcal{R}\, \pi$. En revanche, $\cos(\pi) = -1 \leq \cos(\frac{\pi}{3})$ et $\sin(\pi) = 0 \leq \sqrt{3}/2 = \sin(\frac{\pi}{3})$, donc $\pi \,\mathcal{R}\, (\frac{\pi}{3})$.

2) voir cours (exemple de rédaction : $\mathcal{R}$ est totale si pour tout x dans E et pour tout y dans E, on a $x \,\mathcal{R}\, y$ ou $y \,\mathcal{R}\, x$.)

3) Non, puisqu'on a $\pi \,\mathcal{R}\, (\frac{\pi}{3})$ mais pas $(\frac{\pi}{3}) \,\mathcal{R}\, \pi$.

4) On a vu qu'on n'avait pas $0 \,\mathcal{R}\, (\frac{\pi}{2})$. Mais comme on n'a pas $\sin(\frac{\pi}{2}) \leq \sin 0$, on n'a pas non plus $(\frac{\pi}{2}) \,\mathcal{R}\, 0$, donc la relation n'est pas totale.

5) Supposons que A admette un majorant x. Puisque 0 et $\pi/2$ sont dans A on devrait avoir $0 \,\mathcal{R}\, x$, donc $\cos 0 \leq \cos x$, et $(\frac{\pi}{2}) \,\mathcal{R}\, x$, donc $\sin(\frac{\pi}{2}) \leq \sin x$. Donc $\cos x \geq 1$ et $\sin x \geq 1$, ce qui n'est pas possible. A n'a donc pas de majorant, donc A n'a pas non plus de plus grand élément.

En revanche, n'importe quel élément de $[\pi, 3\pi/2]$ est un minorant de A. En effet, soit $y \in [\pi, 3\pi/2]$. Soit $x \in A$. On a $\cos y \leq 0 \leq \cos x$ et $\sin y \leq 0 \leq \sin x$, donc $y \,\mathcal{R}\, x$. Comme ceci est vrai pour tout x dans A, y est un minorant de A.

Exercice 4

1) $f(z) = 1 \Leftrightarrow z^3 = 1 \Leftrightarrow z \in \{1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}\}$

$f(z) = -2 \Leftrightarrow z^3 = -2 \Leftrightarrow z^3 = 2e^{i\pi} \Leftrightarrow z \in \{2^{1/3}e^{i\pi/3}, 2^{1/3}e^{i3\pi/3} = -2^{1/3}, 2^{1/3}e^{i5\pi/3}\}$

2) f n'est pas injective, puisque $1 \neq e^{i2\pi/3}$, mais $f(1) = f(e^{i2\pi/3}) = 1$.

3) Soit z un complexe tel que $f(z) = iz$, c'est à dire $z^3 = z$. Si $z \neq 0$, alors $z^2 = i = e^{i\pi/2}$, donc $z = e^{i\pi/4}$ ou $z = -e^{i\pi/4}$. Les seules solutions possibles de $f(z) = iz$ sont donc 0, $e^{i\pi/4}$ et $-e^{i\pi/4}$. Réciproquement, ces trois nombres sont bien solutions. On a donc :

$$\{z \in \mathbb{C}, f(z) = iz\} = \{0, e^{i\pi/4}, -e^{i\pi/4}\}$$

4) Remarquons tout d'abord que, puisque λ est strictement positif :

$$x \in [a,b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b \Leftrightarrow \lambda a \leq \lambda x \leq \lambda b \Leftrightarrow \lambda a + \mu \leq \lambda x + \mu \leq \lambda b + \mu \Leftrightarrow \lambda x + \mu \in [\lambda a + \mu, \lambda b + \mu]\}$$

Ceci étant vu, raisonnons par double inclusion. Soit $z \in B_1$. Par définition de B_1, il existe $\theta \in [a,b]$ tel que $z = e^{i(\lambda\theta+\mu)}$. Posons $\theta' = \lambda\theta + \mu$. On a $z = e^{i\theta'}$. De plus, puisque $\theta \in [a,b]$, on a d'après la remarque initiale $\theta' \in [\lambda a + \mu, \lambda b + \mu]$. Donc $z \in B_2$. Réciproquement, soit $z \in B_2$. Il existe $\theta' \in [\lambda a+\mu, \lambda b+\mu]$ tel que $z = e^{i\theta'}$. Posons $\theta = (\theta' - \mu)/\lambda$, si bien que $\theta' = \lambda\theta + \mu$. On a $z = e^{i(\lambda\theta+\mu)}$. De plus, d'après la remarque initiale, $\theta \in [a,b]$. Donc $z \in B_1$. Par double inclusion on a donc $B_1 = B_2$.

5)

$$f(A) = \{f(z), z \in A\} = \left\{f(e^{i\theta}), \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right\} = \left\{(e^{i\theta})^3, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right\} = \left\{e^{i3\theta}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right\}$$

Donc d'après la question 4) appliquée à $a = 0$, $b = \pi/3$, $\lambda = 3$ et $\mu = 0$, on a $f(A) = \left\{e^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]\right\}$.

$1 = e^{i0}$, $i = e^{i\pi/2}$ et $e^{i(15\pi/6)} = e^{i(3\pi/6)} = i$ sont dans $f(A)$ mais pas $e^{i4\pi/3}$.

6) On a vu que $f(A) = \{e^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]\}$. Il s'ensuit que $f(A)$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1 et de partie imaginaire positive. Or z est de module 1 et sa partie imaginaire est positive. Il est donc dans $f(A)$.

7) Pour $k \in \{0,1,2\}$, notons A_k l'ensemble $\{e^{i\theta}, \theta \in [2k\pi/3, \pi/3 + 2k\pi/3]\}$ (on a donc $A_0 = A$, l'ensemble A_1 est l'image de A par la rotation de centre l'origine et d'angle $2\pi/3$, et A_2 est l'image de A par la rotation de centre l'origine et d'angle $4\pi/3$). Notons $B = A_0 \cup A_1 \cup A_2$. Montrons par double inclusion que $f^{-1}(f(A)) = B$.

Soit $z \in f^{-1}(f(A))$. On a donc $f(z) \in f(A) = \{e^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]\}$. Il existe donc $\theta \in [0,\pi]$ tel que $f(z) = e^{i\theta}$, c'est à dire $z^3 = e^{i\theta}$. D'après la formule sur les racines cubiques d'un nombre complexe non nul, il existe donc un entier k dans $\{0,1,2\}$ tel que $z = e^{i(\theta+2k\pi)/3}$. Fixons cet entier k. On a $\theta \in [0,\pi]$, donc $(\theta + 2k\pi)/3 \in [2k\pi/3, \pi/3 + 2k\pi/3]$, donc $z \in A_k$, donc $z \in B$.

Réciproquement, si $z \in B$, alors il existe $k \in \{0,1,2\}$ et $\alpha \in [2k\pi/3, \pi/3 + 2k/\pi/3]$ tel que $z = e^{i\alpha}$. Il existe θ dans $[0,\pi/3]$ tel que $\alpha = \theta + 2k\pi/3$ donc $z = e^{i(\theta+2k\pi/3)}$. On a donc $f(z) = z^3 = e^{i(3\theta+2k\pi)} = e^{i3\theta}$. Or $3\theta \in [0,\pi]$. Donc $f(z) \in \{e^{i\theta'}, \theta' \in [0,\pi]\} = f(A)$. Donc $z \in f^{-1}(f(A))$.

Exercice 5

Montrons tout d'abord que f est bijective. Puisque $f \circ g \circ f = Id_E$ et que Id_E est bijective, l'application $f \circ g \circ f$ est bijective. Notons $h_1 = g \circ f$ et $h_2 = f \circ g$. On a $f \circ h_1 = f \circ g \circ f$, donc $f \circ h_1$ est bijective, donc surjective, donc f est surjective. De plus, $h_2 \circ f = f \circ g \circ f$, donc $h_2 \circ f$ est bijective, donc injective, donc f est injective. Donc f est bijective. Soit f^{-1} son application réciproque. En composant l'égalité $f \circ g \circ f = Id_E$ par f^{-1} à gauche et à droite, on obtient $f^{-1} \circ f \circ g \circ f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ Id_E \circ f^{-1}$ donc $g = f^{-1} \circ f^{-1}$. Or, comme toute application réciproque, f^{-1} est bijective. L'application g est donc bijective comme composée d'applications bijectives.