Corrigé du contrôle continu d'algèbre : sujet 1

Partie I

(ci-dessous, les fautes de frappe présentes dans le sujet ont été corrigées)

Exercice 1 (1,5 pt)

Les propositions suivantes sont-elles vraies pour toutes propositions P et Q ?

1) (0,5pt) P et (nonQ ou P) $\Leftrightarrow$ P Vrai Faux

C'est vrai : en effet, si "P et (nonQ ou P)" est vraie, alors P est vraie et (nonQ ou P) est vraie. En particulier, P est vraie. Réciproquement, si P est vraie, alors (nonQ ou P) est vraie, donc "P et (nonQ ou P)" est vraie. Les deux propositions sont donc bien équivalentes.

2) (1pt) non(nonP ou (P et nonQ)) $\Rightarrow$ (P et Q) Vrai Faux

C'est vrai. En effet, "non(nonP ou (P et nonQ))" est équivalent à "P et non(P et nonQ)", donc à "P et (nonP ou Q"), donc à "(P et nonP) ou (P et Q)". Comme P et nonP est toujours fausse, "(P et nonP) ou (P et Q)" est vrai ssi (P et Q) est vrai, en d'autres termes "(P et nonP) ou (P et Q)" est équivalent à (P et Q). On obtient donc par transitivité de l'équivalence : non(nonP ou (P et nonQ)) $\Leftrightarrow$ (P et Q) donc en particulier non (nonP ou (P et nonQ)) $\Rightarrow$ (P et Q).

Exercice 2 (2,5 pts).**Donner la négation des propositions suivantes. Dire si P est vraie ou fausse.**

1) P : Il existe un réel x tel que, pour tout réel y, si ($y < x$ et $y \leq 1$) alors $y^2 > x^2$.

non P : Pour tout réel x, il existe un réel y tel que ($y < x$ et $y \leq 1$) et $y^2 \leq x^2$.

P est vraie. En effet, le réel $x = 0$ convient car si ($y < 0$ et $y \leq 1$), on a en particulier $y < 0$, donc $y^2 > 0 = x^2$.

2) Q : Pour tout ϵ dans $\mathbb{R}_+^*$, pour tout x dans $\mathbb{R}$, pour tout y dans $\mathbb{R}$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x - y| < \alpha$ alors $|x^2 - y^2| < \epsilon$

non Q : Il existe ϵ dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe x dans $\mathbb{R}$ et y dans $\mathbb{R}$ tels que, pour tout $\alpha > 0$, $|x - y| < \alpha$ et $|x^2 - y^2| \geq \epsilon$

Remarque : la proposition Q n'est pas très intéressante (elle est vraie de manière évidente, à cause du fait que le α dépend non seulement de x mais aussi de y). Une proposition plus intéressante aurait été la suivante :

Q' : Pour tout ϵ dans $\mathbb{R}_+^*$, pour tout x dans $\mathbb{R}$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout y dans $\mathbb{R}$, si $|x-y| < \alpha$ alors $|x^2 - y^2| < \epsilon$

dont la négation est :

non Q' : Il existe ϵ dans $\mathbb{R}_+^*$ et x dans $\mathbb{R}$ tels que, pour tout $\alpha > 0$, il existe y dans $\mathbb{R}$ tel que $|x-y| < \alpha$ et $|x^2 - y^2| \geq \epsilon$

Dans Q', le α dépend du x mais pas du y. Par définition de la continuité d'une fonction, Q' veut dire que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^2 est continue, ce qui est vrai.

3) R : $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x-y| < \alpha \Rightarrow |x^2 - y^2| < \epsilon.$

non R : $\exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, |x-y| < \alpha$ et $|x^2 - y^2| \geq \epsilon.$

Dans la proposition R, le α ne dépend ni de x ni de y. La proposition R veut dire que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^2 est uniformément continue (une notion que vous verrez plus tard, sans doute en deuxième année) et c'est faux.

Exercice 3 (2 pts).

Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ & x & \mapsto &]x,+\infty[\end{array}$$

Sans justifier, donner la valeur de $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ **et** $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} f(n)$**.**

a) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f(n) =]0,+\infty[$

En effet, pour tout entier naturel n, notons $A_n = f(n) =]n,+\infty[$.

Rédaction 1 : Pour tout entier naturel n, $A_n \subset A_0$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_0$. Réciproquement, A_0 est l'un des A_n donc $A_0 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_0$. Donc par double inclusion, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_0 =]0,+\infty[$.

Rédaction 2 (plus détaillée) : Montrons que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n =]0,+\infty[$ par double inclusion. Soit x un élément de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Par définition, il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que $x \in A_n =]n,+\infty[$ Donc $x \in]0,+\infty[$. Donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset]0,+\infty[$. Réciproquement, soit $x \in]0,+\infty[$. Alors $x \in A_0$. Or 0 est un entier naturel. Donc il existe un entier naturel n tel que $x \in A_n$. Donc $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Donc $]0,+\infty[\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[$. Donc par double inclusion, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(n) =]0,+\infty[$.

b) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} f(n) = \emptyset$

On pose toujours $A_n = f(n)$. Montrons que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. En effet, les ensembles A_n sont des sous ensembles de $\mathbb{R}$ donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. De plus, soit x un réel. Il existe un entier naturel n tel que $x \leq n$, donc tel que $x \notin]n, +\infty[$. Donc $x \notin A_n$. Donc $x \not\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]n, +\infty[$. Comme ceci est vrai pour tout réel x, on en déduit que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Exercice 4 (2pts)

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ?

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

application	f_1	f_2	f_3	f_4
injective ? Répondre oui ou non	*non*	*oui*	*oui*	*non*

Si vous ne comprenez pas les réponses, demandez à un camarade qui a compris, puis à votre chargé de TD, puis à moi.

Exercice 5 (2 pts) **Sans justifier, donner tous les couples de réels** (x, y) **tels que** $(x^2 - 1)y = 0$ **et** $x(y + 2) = 0$: $(0, 0)$, $(1, -2)$ et $(-1, -2)$.

En effet, soit (x, y) un couple solution. Si $y = 0$ alors $y + 2 \neq 0$ donc d'après la seconde équation $x = 0$, donc $(x, y) = (0, 0)$. Sinon, $y \neq 0$ donc, d'après la première équation, $x^2 - 1 = 0$, donc $x = 1$ ou $x = -1$; en particulier, $x \neq 0$, donc d'après la seconde équation $y + 2 = 0$, donc $y = -2$, donc $(x, y) = (1, -2)$ ou $(x, y) = (-1, -2)$. On en déduit que les seules solutions possibles sont $(0, 0)$, $(1, -2)$ et $(-1, -2)$. Réciproquement, il est clair que tous ces couples sont solutions. Il y a donc trois couples solutions : $(0, 0)$, $(1, -2)$ et $(-1, -2)$.

Contrôle continu d'algèbre
Partie II : problème

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (n,p) & \mapsto & 2^n 3^p \end{array}$$

1) (1pt) Sans justifier, donner deux exemples d'entiers naturels qui n'appartiennent pas à $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$.

Voici quelques exemples : 0, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20. En fait, tous les entiers qui ne peuvent pas s'écrire comme produit d'une puissance de 2 et d'une puissance de 3.

2) (1pt) Montrer qu'il existe un sous-ensemble B de $\mathbb{N}$ tel que $f(f^{-1}(B)) \neq B$.

Par exemple, $B = \mathbb{N}$. En effet, $f^{-1}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ car si f est une application de E vers F on a toujours $f^{-1}(F) = E$. Mais d'après la question 1), $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \neq \mathbb{N}$. Donc $f(f^{-1}(\mathbb{N})) \neq \mathbb{N}$.

3) (1pt) Déterminer l'image par f de $\mathbb{N}\times\{0\}$.

On a $f(\mathbb{N}\times\{0\}) = \{f(n,p), (n\in\mathbb{N} \text{ et } p\in\{0\})\} = \{2^n3^p, (n\in\mathbb{N} \text{ et } p=0)\} = \{2^n3^0, n\in\mathbb{N}\} = \{2^n, n\in\mathbb{N}\}$. Donc $f(\mathbb{N}\times\{0\})$ est l'ensemble des puissance de 2.

4)(1,5 pt) On admet que le produit de deux entiers naturels impairs est impair. Montrer que si q est un entier naturel impair alors pour tout p dans $\mathbb{N}$, q^p est impair.

Soit q un entier naturel impair. Pour tout entier naturel p, appelons $H(p)$ la propriété : q^p est impair.

Initialisation : On a $q^0 = 1$ donc q^0 est impair, donc $P(0)$ est vrai. qui est

Hérédité : soit p dans $\mathbb{N}$. Supposons $H(p)$ vraie, c'est à dire q^p impair. Comme $q^{p+1} = q^pq$, q^{p+1} est donc le produit de deux entiers naturels pairs, donc q^{p+1} est impair. Donc $H(p+1)$ est vraie.

Par récurrence, $H(p)$ est donc vraie pour tout p dans $\mathbb{N}$, et c'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

A cause d'un problème de numérotation sans importance il n'y avait pas de question 5.

6) (1,5 pt) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les entiers naturels n et p pour que 2^n3^p soit pair. En déduire l'image réciproque par f de l'ensemble des entiers naturels pairs, c'est à dire de l'ensemble $2\mathbb{N} = \{n\in\mathbb{N}, \exists k\in\mathbb{N}, n = 2k\}$.

2^n3^p est pair si et seulement si $n \geq 1$. En effet, si $n = 0$, alors $2^n3^p = 2^03^p = 3^p$ qui est impair d'après 4). Réciproquement, si $n \geq 1$ alors $k = 2^{n-1}3^p \in \mathbb{N}$ et donc comme $2^n3^p = 2k$,

$2^n 3^p$ est pair.

Or l'image réciproque par f de l'ensemble des entiers naturels pairs est l'ensemble des couples d'entiers naturels (n,p) tels que $f(n,p)$ est pair, donc tels que $2^n 3^p$ est pair. Comme d'après ce qui précède $2^n 3^p$ est pair ssi $n \geq 1$, on a donc

$$f^{-1}(2\mathbb{N}) = \{(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, n \geq 1\} = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$$

Soient n, n', p et p' des entiers naturels. On rappelle que $(n,p) \neq (n',p')$ si et seulement si $n \neq n'$ ou $p \neq p'$.

7) (2pts) Montrer que si $n > n'$, alors il existe un entier m tel que $f(n,p)/m$ est pair et $f(n',p')/m$ est impair. En déduire que si $n \neq n'$ alors $f(n,p) \neq f(n',p')$.

Supposons $n > n'$. Posons $m = 2^{n'}$. On a $f(n,p)/m = 2^{(n-n')}3^p$. Comme $n - n' \geq 1$, $f(n,p)/m$ est donc pair. En revanche, $f(n',p')/m = 3^{p'}$ est impair d'après 4). Donc $f(n,p) \neq f(n',p')$.

On a montré que si $n > n'$ alors $f(n,p) \neq f(n',p')$. Comme n et n' jouent des rôles symétriques, un raisonnement analogue montre que si $n' > n$ alors $f(n,p) \neq f(n',p')$. Or $n \neq n'$ ssi $n > n'$ ou $n' > n$. Donc finalement, si $n \neq n'$, alors $f(n,p) \neq f(n',p')$.

8) (2pts) Montrer que l'application f est injective.

Soient (n,p) et (n',p') des couples d'entiers naturels tels que $f(n,p) = f(n',p')$, c'est à dire $2^n 3p = 2^{n'}3^{p'}$. Pour montrer que f est injective, il suffit de montrer qu'on a forcément $(n,p) = (n',p')$ c'est à dire $n = n'$ et $p = p'$. D'après la contraposée de l'implication démontrée en 7), on a donc $n = n'$. Donc $2^n 3^p = 2^n 3^{p'}$. En divisant par 2^n, qui est non nul, on obtient donc $3^p = 3^{p'}$ d'où il suit que $p = p'$. On a donc $n = n'$ et $p = p'$. Donc f est injective.

Remarque : le problème montre qu'il existe une injection de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ ce qui signifie qu'en un certain sens, il y a au moins autant d'éléments dans $\mathbb{N}$ que dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. C'est surprenant, mais c'est comme ça !