UNIVERSITE PARIS-DAUPHINE DUMI2E 1ère année

Corrigé du contrôle continu d'algèbre du 30 octobre 2006

Exercice 1

R est une relation d'équivalence si :

• R est réflexive : pour tout x dans E, xRx

• R est symétrique : pour tout x dans E, pour tout y dans E, si xRy alors yRx

• R est transitive : pour tout x dans E, pour tout y dans E et pour tout z dans E, si xRy et yRz alors xRz.

Exercice 2

2a) non P : il existe un réel x tel que pour tout réel y, $yx \leq x^2$

Soit $x = 0$. Pour tout réel y, on a $yx = x^2 = 0$ donc $yx \leq x^2$. Donc non P est vraie et P est fausse.

2b) non Q : il existe un réel x et il existe un réel y tels que $x > y$ et $x^2 \leq y^2$.

non Q est vraie. En effet, pour $x = 0$ et $y = -1$ on a bien $x > y$ et $x^2 \leq y^2$. Donc Q est fausse.

Exercice 3

3a) Supposons $A \cap B = \emptyset$. Soit $x \in B$. Puisque $A \cap B = \emptyset$, on a $x \notin A$ donc $x \in C_E(A)$. Puisque c'est vrai pour tout $x \in B$, on a $B \subset C_E(A)$.

3b) Supposons $C_E(A) \cap C_E(B) = \emptyset$. D'après la question précédente si X et Y sont deux sous-ensembles disjoints de E alors $Y \subset C_E(X)$. En appliquant ce résultat à $X = C_E B$ et $Y = C_E A$ on obtient $C_E(A) \subset C_E(C_E(B)) = B$.

3c) D'après les questions a) et b), si $A \cap B = \emptyset$ et $C_E(A) \cap C_E(B) = \emptyset$ alors $B \subset C_E(A)$ et $C_E(A) \subset B$ donc $B = C_E(A)$. Réciproquement, si $B = C_E(A)$ alors $A \cap B = A \cap C_E(A) = \emptyset$ et $C_E(A) \cap C_E(B) = C_E(A) \cap C_E(C_E(A)) = C_E(A) \cap A = \emptyset$.

3d) D'après la question 3c), il existe un unique ensemble qui convient et c'est $B = C_E(A) =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

Exercice 4

4a) $f(\{0, 1, 2\}) = \{f(0), f(1), f(2)\} = \{0, 0, 1\} = \{0, 1\}$

4b) $f(A) = \{f(2p), p \in \mathbb{N}\} = \{f(0)\} \cup \{f(2p), p \in \mathbb{N}^*\}$. Or $f(0) = 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $2p \in \mathbb{N}^*$ donc $f(2p) = 2p-1$. On a donc $f(A) = \{0\} \cup \{2p-1, p \in \mathbb{N}^*\} = \{0, 1, 3, 5, 7, ...\}$.

Rappelons que $f^{-1}(A)$ est l'ensemble des antécédents des éléments de A : $f^{-1}(A) = \{n \in \mathbb{N}, f(n) \in A\}$. Soit $B = \{0\} \cup \{2p+1, p \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 3, 5, 7, ...\}$. Montrons que $f^{-1}(A) = B$ par double inclusion.

Soit $n \in B$. Si $n = 0$ alors $f(n) = 0 \in A$. Si $n \neq 0$ alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$, donc $f(n) = (2p+1) - 1 = 2p \in A$. Bilan : dans tous les cas $f(n) \in A$ donc $n \in f^{-1}(A)$. Comme c'est vrai pour tout $n \in B$, $B \subset f^{-1}(A)$.

Réciproquement, soit $n \in f^{-1}(A)$. Si $n = 0$ alors $n \in B$. Si $n \neq 0$ alors $f(n) = n-1$. De plus, $f(n) \in A$ donc il existe un entier naturel p tel que $f(n) = 2p$. Donc $n - 1 = 2p$. Donc $n = 2p+1$ donc $n \in B$. On a donc bien $f^{-1}(A) \subset B$ et finalement $f^{-1}(A) = B$.

Remarque : c'est par hasard que $f(A) = f^{-1}(A)$: ce n'est pas vrai en général !

4c) On a $f(0) = f(1) = 0$, donc f n'est pas injective.

Montrons que f est surjective : soit $n \in \mathbb{N}$. On a $n+1 \in \mathbb{N}^*$ donc $f(n+1) = (n+1) - 1 = n$. Donc n a au moins un antécédent par f. Comme ceci est vraie pour tout entier naturel n, f est surjective.

Enfin, f n'étant pas injective, elle n'est pas bijective.

4d) Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par : pour tout entier naturel n, $g(n) = n+1$. Montrons que $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $f \circ g(n) = f(g(n)) = f(n+1)$. Or $n+1 \neq 0$ donc $f(n+1) = (n+1) - 1 = n$. Donc $f \circ g(n) = n = Id_{\mathbb{N}}(n)$. Comme c'est vrai pour tout entier naturel n, $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$.

4e) Non. En effet, s'il existait une application $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$, alors $h \circ f$ serait bijective, donc $h \circ f$ serait injective et donc f serait injective. Mais on a vu à la question c) que f n'est pas injective. Il n'existe donc pas d'application $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$.