Corrigé du partiel d'algèbre du 13 novembre 2006

Exercice 1 L'application $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) = x^2$ n'est pas injective, car $f(1) = f(-1)$, et n'est pas surjective, car les réels strictement négatifs n'ont pas d'antécédent par f.

Exercice 2

2a) On a $1 \neq -1$ et $f(1) = f(-1)$, donc f n'est pas injective. Montrons que f est surjective. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Tout nombre complexe a au moins une racine quatrième, en particulier le complexe $-1/z$. Il existe donc $z' \in \mathbb{C}$ tel que $(z')^4 = -1/z$. Le complexe z' est nécessairement non nul et $f(z') = -1/(-1/z) = z$, donc z a au moins un antécédent par f. Donc f est surjective.

2b) Remarquons tout d'abord que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $|f(z)| = |-1/z^4| = |-1|/|z^4| = 1/|z|^4$. Soit $z \in A$. On a $|z| = 2$ donc $|f(z)| = 1/2^4 = 1/16$ donc $f(z) \in B$. Donc $f(A) \subset B$. Réciproquement, soit $z' \in B$. Comme $B \subset \mathbb{C}^*$ et que f est surjective, il existe $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $z' = f(z)$. On a $1/|z|^4 = |z'| = 1/16$ donc $|z| = 2$ donc $z \in A$. Donc $z' = f(z) \in f(A)$. Donc $B \subset f(A)$, et par double inclusion, $B = f(A)$.

2c) Soit $z \in C^*$ tel que $f(z) = \bar{z}$. On a $|f(z)| = 1/|z|^4$ et $|f(z)| = |\bar{z}| = |z|$ donc $|z| = 1/|z|^4$ donc $|z|^5 = 1$ donc $|z| = 1$.

2d) Soit $S = \{z \in C^*, f(z) = \bar{z}\}$. Soit $z \in S$. D'après la question 2c), on a $|z| = 1$ donc $z\bar{z} = |z|^2 = 1$, donc $-1 = z^4\bar{z} = z^3$, donc $z^3 = -1$. Réciproquement, si $z^3 = -1$ alors $|z| = 1$, donc $z\bar{z} = 1$ et donc $f(z) = \bar{z}$. Donc S est l'ensemble des racines cubiques de -1. Comme $-1 = e^{i\pi}$ et d'après la formule du cours pour l'ensemble des racines nièmes d'un nombre complexe non nul,

$$S = \{e^{i(\pi+2k\pi)/3}, 0 \leq k \leq 2\} = \{e^{i\pi/3}, e^{i\pi} = -1, e^{5i\pi/3} = e^{-i\pi/3}\}$$

Exercice 3

3a) $|1| = |i|$ et $Arg(1) = 0 \leq \pi/2 = Arg(i)$ donc $1 \,\mathcal{R}\, i$.

On n'a pas $|i| < |1|$, puisque $|1| = |i|$, et on n'a pas non plus ($|i| = |1|$ et $Arg(i) \leq Arg(1)$), puisque $Arg(i) > Arg(1)$; donc on n'a pas $i \,\mathcal{R}\, 1$.

Enfin, $|i| = 1 < \sqrt{2} = |1+i|$ donc $i\mathcal{R}(1+i)$.

3b) On a vu dans la réponse à la question 3a) que pour $z = 1$ et $z' = i$ on a $z\mathcal{R}z'$ mais pas $z'\mathcal{R}z$. $\mathcal{R}$ n'est donc pas symétrique.

3c) Soient z, z', $z"$ des complexes non nuls tels que $z\mathcal{R}z'$ et $z'\mathcal{R}z"$. D'après la définition de $\mathcal{R}$, on a $|z| < |z'|$ ou $|z| = |z'|$ donc $|z| \leq |z'|$. De même, $|z'| \leq |z"|$. De ce fait, si $|z| < |z'|$ ou $|z'| < |z"|$, on a $|z| < |z"|$, donc $z\mathcal{R}z"$. Sinon, d'après la définition de $\mathcal{R}$, $|z| = |z'|$, $Arg(z) \leq Arg(z')$, $|z'| = |z"|$ et $Arg(z') \leq Arg(z")$, donc $|z| = |z"|$ et $Arg(z) \leq Arg(z")$, donc $z\mathcal{R}z"$.

3d) Soient z et z' des complexes non nuls. On a $|z| = |z|$ et $Arg(z) \leq Arg(z)$ donc $z\mathcal{R}z$, donc $\mathcal{R}$ est reflexive.

Si $z\mathcal{R}z'$ et $z'\mathcal{R}z$ alors $|z| \leq |z'|$ et $|z'| \leq |z|$ donc $|z| = |z'|$. Donc on n'a ni $|z| < |z'|$ ni $|z'| < |z|$, donc, d'après la définition de $\mathcal{R}$, $Arg(z) \leq Arg(z')$ et $Arg(z') \leq Arg(z)$, donc $Arg(z) = Arg(z')$ et finalement $z = z'$. Donc $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

Enfin, on a vu au 3c) que $\mathcal{R}$ est transitive. $\mathcal{R}$ est donc bien une relation d'ordre. Montrons qu'il s'agit d'une relation d'ordre total.

Soient z et z' des complexes non nuls. Supposons qu'on n'ait pas $z\mathcal{R}z'$. On n'a donc pas $|z| < |z'|$, donc $|z'| \leq |z|$. Si $|z'| < |z|$ alors $z' \mathcal{R} z$. Sinon, $|z'| = |z|$; mais alors, comme on n'a pas $z\mathcal{R}z'$, $Arg(z') < Arg(z)$, donc $z' \mathcal{R} z$. On a bien montré que si on n'a pas $z\mathcal{R}z'$ alors on a $z' \mathcal{R} z$. Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total.

3e) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Soit $z' = 2z$. z' est un élément de $\mathbb{C}^*$. De plus, $|z'| > |z|$, donc on n'a pas $z' \mathcal{R} z$; donc z n'est pas un majorant de $\mathbb{C}^*$. Donc aucun élément de $\mathbb{C}^*$ n'est un majorant de $\mathbb{C}^*$, donc $\mathbb{C}^*$ n'a pas de plus grand élément. De même, $z/2 \in \mathbb{C}^*$ et on n'a pas $z\mathcal{R}(z/2)$, donc aucun élément de $\mathbb{C}^*$ n'est un minorant de $\mathbb{C}^*$, donc $\mathbb{C}^*$ n'a pas de plus petit élément.

Exercice 4

4a) On a $B_0 = C_E(A)$. Par conséquent, si $x \in C_E(A)$, alors $x \in B_0$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B_n$, donc $x \in B$. Donc $C_E(A) \subset B$. Soit $x \in E$. On vient de voir que si $x \notin A$, alors $x \in B$. Puisqu'une implication et sa contraposée sont équivalentes, on a donc aussi : si $x \notin B$, alors $x \in A$.

4b) Soit $y \in B_1$. Comme $B_1 = f(B_0)$, on a $y \in f(B_0)$, donc $y \in f(E)$. Comme l'espace d'arrivée de f est A, on a $f(E) \subset A$, donc $y \in A$. Donc $B_1 \subset A$.

4c) Le plus simple est de raisonner comme à la question précédente. On peut aussi faire une récurrence comme suit. Soit P_n la propriété : $B_n \subset A$. D'après la question 4b), P_1 est vraie. Soit $n \in N^*$. Supposons P_n vraie. Alors $B_{n+1} = f(B_n) \subset f(A) \subset f(E) \subset A$. Donc P_{n+1} est vraie. Donc par récurrence P_n est vraie pour tout $n \in N^*$.

(la récurrence est correcte, mais n'apporte rien, car on pourrait directement dire : $B_{n+1} = f(B_n) \subset f(E) \subset A$)

4d) Soit $y \in f(B)$. Il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$. Par définition de B, il existe un entier naturel n tel que $x \in B_n$. Puisque $y = f(x)$, on a $y \in f(B_n) = B_{n+1}$, donc $y \in B_m$ pour $m = n + 1$, donc $y \in B$.

4e) Soit x in E. Si $x \in B$ alors $g(x) = f(x)$; or $f(x) \in A$ par définition de f, donc $g(x) \in A$. Si $x \notin B$ alors $g(x) = x$; or d'après la question 1a), $x \in A$, donc $g(x) \in A$. Donc dans tous les cas $g(x) \in A$. Donc $g(E) \subset A$.

4f) Soient $x \in B$ et $y \in C_E(B)$. Comme $x \in B$, on a $g(x) = f(x)$ et $f(x) \in f(B)$. Or d'après la question 4d), $f(B) \subset B$, donc $f(x) \in B$ et donc $g(x) \in B$. De plus, comme $y \notin B$, on a $g(y) = y$ donc $g(y) \notin B$. Puisque $g(x) \in B$ et $g(y) \notin B$, on a $g(x) \neq g(y)$.

4g) Soient x et y des éléments de E tels que $x \neq y$. Pour montrer que g est injective, il suffit de montrer que $g(x) \neq g(y)$. Il y a 4 cas possibles : $x \in B$ et $y \in B$; $x \in B$ et $y \notin B$; $x \notin B$ et $y \in B$; $x \notin B$ et $y \notin B$.

Si $x \in B$ et $y \in B$, alors $g(x) = f(x)$ et $g(y) = f(y)$. De plus, comme f est injective et $x \neq y$, on a $f(x) \neq f(y)$, donc $g(x) \neq g(y)$.

Si $x \in B$ et $y \notin B$, alors, d'après la question 4f), $g(x) \neq g(y)$. Le cas $x \notin B$ et $y \in B$ est symétrique (on inverse juste le rôle de x et de y).

Enfin, si $x \notin B$ et $y \notin B$, alors $g(x) = x$ et $g(y) = y$, donc comme $x \neq y$, on a $g(x) \neq g(y)$. Donc dans tous les cas, $g(x) \neq g(y)$. Donc g est injective.

4h) Puisque $y \in B$, il existe un entier naturel n tel que $y \in B_n$. Puisque $y \in A$ et $B_0 = C_E(A)$, $y \notin B_0$, donc $n \neq 0$, donc $B_n = f(B_{n-1})$. Donc il existe $x \in B_{n-1}$ tel que $y = f(x)$. Puisque $B_{n-1} \subset B$, on a $x \in B$ donc $g(x) = f(x)$ donc $y = g(x)$. Donc y a au moins un antécédent par g.

4i) Puisque $y \in A \backslash B$, on a $y \notin B$ donc $g(y) = y$, donc y a au moins un antécédent par g : lui-même.

4j) Si $y \in A$, alors $y \in A \cap B$ ou $y \in A \backslash B$, et d'après les questions 4i) et 4j), dans les deux cas, y a au moins un antécédent par g, donc $y \in g(E)$. Donc $A \subset g(E)$. Comme, d'après la question 4e), on a $g(E) \subset A$, on obtient par double inclusion $g(E) = A$.

4k) D'après un résultat du cours, si une application g d'espace de départ E est injective, alors l'application $h : E \to g(E)$ telle que pour tout x dans E, $h(x) = g(x)$, est bijective (on dit que g induit une bijection de E dans $g(E)$). Puisque $g(E) = A$, il existe donc une bijection de E dans A.

Remarques :

1) Le fait que E est un ensemble infini n'a jamais été utilisé. C'était indiqué juste pour que vous ne fassiez pas de raisonnements qui ne sont corrects que pour des ensembles finis.

2) On a donc montré que s'il existe une injection de E dans une partie A de E, alors il existe une bijection de E dans A. On en déduit facilement le théorème de Cantor-Bernstein, qui peut être formulé ainsi : soient E et F des ensembles; s'il existe $f : E \to F$ injective et $g : F \to E$ injective, alors il existe $h : E \to F$ bijective.

Voici la preuve : soit $A = g(F)$. Pour tout $x \in E$, $g \circ f(x) = g(f(x)) \in g(F) = A$. L'application h de E dans A telle que, pour tout x dans E, $h(x) = g \circ f(x)$, est donc bien définie. De plus, comme g et f sont injectives, h est également injective. Donc il existe une injection de E dans A. Comme $A \subset E$, d'après l'exercice 4 du partiel, il existe une bijection $u : E \mapsto B$. Comme g est injective et $g(F) = B$, l'application $v : F \mapsto B$ telle que pour tout x dans F, $v(x) = g(x)$, est bijective. Donc l'application $v^{-1} \circ u$ est une bijection de E dans F. Il existe donc bien une bijection de E dans F.

Pour en savoir plus sur le théorème de Cantor-Bernstein, vous pouvez consulter par exemple le site :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Cantor-Bernstein