Ensembles

1 Définitions

Un ensemble est une collection d'objets. Ces objets sont appelés éléments de l'ensemble. Pour dire que x est un élément de l'ensemble E, on écrit $x \in E$. Pour dire que x n'est pas un élément de E, on écrit $x \notin E$.Un ensemble est caractérisé par ses éléments. Deux ensembles A et B sont donc égaux s'ils ont les mêmes éléments. On note alors $A = B$.

L'ensemble qui contient les éléments $Truc$, $Bidule$ et $Machin$ se note

$$\{Truc, Bidule, Machin\}$$

L'ordre dans laquelle on écrit les éléments ne compte pas. L'ensemble $\{Machin, Truc, Bidule\}$ est donc le même que l'ensemble $\{Truc, Bidule, Machin\}$. Si on rajoute dans la liste des éléments un élément qui y figure déjà, on ne change pas l'ensemble. L'ensemble

$$B = \{Truc, Bidule, Machin, Bidule\}$$

est donc le même que l'ensemble

$$A = \{Truc, Bidule, Machin\}$$

Pour[1] décrire un ensemble A, il faut dire quels sont ses éléments. On peut le faire de deux manières. Soit en donnant la liste de ces éléments de manière explicite, soit en définissant A comme l'ensemble des éléments satisfaisant une certaine propriété. Par exemple, l'ensemble A des entiers allant de 0 à 5 inclus peut notamment être décrit des trois manières suivantes :

$$A = \{n \in \mathbb{N}, n \leq 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{n \in \mathbb{Z}, 0 \leq n \leq 5\}$$

L'ensemble qui n'a aucun élément s'appelle ensemble vide. On le note $\emptyset$. On a donc $\emptyset = \{\}$.

Inclusion

On dit que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B si tout élément de A est un élément de B. On note alors $A \subset B$. Deux ensembles A et B sont égaux ssi A est inclus dans B et B est inclus dans A. La méthode la plus courante pour montrer que deux ensembles sont égaux est d'ailleurs de procéder par double inclusion, c'est à dire de montrer d'abord que $A \subset B$ puis que $B \subset A$. L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble : pour tout ensemble B, $\emptyset \subset B$.

[1] En effet, $x \in B$ ssi ($x = Truc$ ou $x = Bidule$ ou $x = Machin$ ou $x = Bidule$) ssi ($x = Truc$ ou $x = Bidule$ ou $x = Machin$) ssi $x \in A$. A et B ont donc bien les mêmes éléments.

Pour dire que A est inclus dans B, on dit aussi que A est un sous-ensemble de B, ou encore que A est une partie de B. L'ensemble des parties de B se note $\mathcal{P}(B)$.

Exemple : soit B l'ensemble $B = 1, 2, 3$. Quels sont les parties de B ? Ce sont les ensembles inclus dans B. C'est à dire : $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, et $\{1, 2, 3\} = B$. On a donc :

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, B\}$$

Remarque 1 : l'ensemble B est bien un ensemble dont tous les éléments sont des éléments de B. C'est donc bien une partie de B. Un sous-ensemble de B qui est différent de B s'appelle un sous-ensemble strict de B.

Remarque 2 : un ensemble qui ne contient qu'un seul élément s'appelle un singleton. Il faut bien distinguer le nombre 3 du singleton $\{3\}$. Ces deux objets n'ont pas la même nature. Le premier est un nombre, c'est un objet du même type que 2, 5, 12, etc. Le second est un ensemble, c'est un objet du même type que $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 8\}$, $\{2, 5, 7, 9\}$, etc.

Remarque 3 : dans l'exemple ci-dessus, B a 3 éléments et $\mathcal{P}(B)$ a $8 = 2^3$ éléments. Ce n'est pas un hasard. On montrera plus tard que si E est un ensemble fini à n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini à 2^n éléments.

2 Union et intersection de deux ensembles

L'union des ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B. On la note $A \cup B$. Formellement,

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

Par exemple, si $A = \{2, 5, 7\}$ et $B = \{1, 5, 7, 9\}$, $A \cup B = \{2, 5, 7, 1, 5, 7, 9\} = \{1, 2, 5, 7, 9\}$.

L'intersection des ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. On la note $A \cap B$. Formellement,

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$$

Par exemple, si A et B sont les deux ensembles précédents, $A \cap B = \{5, 7\}$.

Commutativité et associativité

Pour n'importe quels ensembles A et B, on a $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$. On dit que l'union et l'intersection sont des opérations commutatives.[2].

[2] La commutativité de l'union (respectivement, de l'intersection) est une conséquence de la commutativité du OU (respectivement, du ET).

De plus, pour n'importe quels ensembles A et B, C, on a :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \text{ et } A \cap (B \cap C) = (A \cup B) \cup C$$

Les expressions $A \cup B \cup C$ et $A \cap B \cap C$ ne sont donc pas ambigües. La première désigne l'ensemble des éléments qui appartiennent à au moins l'un des trois ensemble A, B, C. La seconde désigne l'ensemble des éléments qui appartiennent aux trois ensembles A, B, C.

Exercice 1 *Soient A et B les deux ensembles ci-dessus. Soit $C = \{2, 7, 9, 10\}$. Donner la liste des éléments de $A \cup B \cup C$ et de $A \cap B \cap C$.*

Les notions d'union et d'intersection se généralisent à un nombre quelconque d'ensembles. Commençons par l'union. Soit $n \geq 1$ un entier et A_1, A_2,..., A_n des ensembles. L'union des ensembles A_1, A_2,...,A_n se note

$$A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n$$

ou, de manière plus concise,

$$\bigcup_{i \in \{1,2,...n\}} A_i$$

C'est l'ensemble des éléments qui appartiennent a au moins l'un des ensembles A_i : on a donc

$$x \in A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n \text{ ssi il existe } i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ tel que } x \in A_i$$

Encore plus généralement, si I est un ensemble non vide quelconque, et si pour tout $i \in I$, A_i est un ensemble,

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

désigne l'ensemble des éléments qui appartiennent à au moins l'un des ensembles A_i :

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \text{ ssi il existe } i \in I \text{ tel que } x \in A_i$$

.

De même, l'intersection des ensembles A_1, A_2,...,A_n se note

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$$

ou

$$\bigcup_{i \in \{1,2,...n\}} A_i$$

C'est l'ensemble des éléments qui appartiennent à tous les A_i :

$$x \in A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n \text{ ssi pour tout } i \in \{1, 2, ..., n\}, \text{ on a } x \in A_i$$

Plus généralement, si I est un ensemble non vide quelconque, et si pour tout $i \in I$, A_i est un ensemble,

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

désigne l'ensemble des éléments qui appartiennent à tous les A_i :

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \text{ ssi pour tout } i \in I, \text{ on a } x \in A_i$$

Remarque 4 : l'union et l'intersection des ensembles A_1, A_2,..., A_n peuvent aussi s'écrire, respectivement, $\bigcup\limits_{1\leq i\leq n} A_i$ et $\bigcap\limits_{1\leq i\leq n} A_i$.

Remarque 5 : La variable i est muette : les ensembles $\bigcup\limits_{1\leq i\leq n} A_i$ et $\bigcup\limits_{1\leq k\leq n} A_k$ sont les mêmes. De même, $\bigcup\limits_{k\in I} A_k$ et $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ désignent le même ensemble.

Remarque 6 (notion d'opération) : Une opération[3] sur un ensemble F est une application qui, à deux éléments de F associe un élément de FPar exemple, dans $\mathbb{N}$, l'addition (respectivement, la multiplication) associe au couple d'entiers naturel (n, p) un entier naturel noté $n+p$ (respectivement, $n \times p$). De même, l'union associe à un couple (A, B) de parties de E une partie de E noté $A \cup B$. C'est donc une opération sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. De même, l'intersection est une opération sur $\mathcal{P}(E)$.

Distributivité de l'union sur l'intersection et de l'intersection sur l'union.

Soient A, B, C trois ensembles. On a $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. On dit que l'union est distributive sur l'intersection et que l'intersection est distributive sur l'union. Pour le prouver, il suffit d'utiliser la distributivité du OU sur le ET et la distributivité du ET sur le OU.

De même, si A et B_1, B_2, ..., B_n sont des ensembles, on a :

$$A \cup (B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap ... \cap (A \cup B_n)$$

et

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ... \cup (A \cap B_n)$$

Encore plus généralement, si I est un ensemble d'indices et pour tout $i \in I$, B_i est un ensemble, on a :

$$A \bigcup \left(\bigcap_{i\in I} B_i \right) = \bigcap_{i\in I} (A \cup B_i)$$

et

$$A \bigcup \left(\bigcap_{i\in I} B_i \right) = \bigcap_{i\in I} (A \cup B_i)$$

On le montrera en TD.

[3] Plus précisément, une opération binaire, mais toutes les opérations que nous considérerons seront de ce type.

3 Différence de deux parties, complémentaire d'une partie

Ensemble "A moins B"

Soient A et B deux ensembles. On appelle "A moins B", et on note $A \setminus B$, l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B. On a donc :

$$x \in A \setminus B \text{ ssi } x \in A \text{ et } x \notin B$$

Par exemple, si $A = \{2,5,7\}$ et $B = \{1,5,7,9\}$, on a $A \setminus B = \{2\}$ et $B \setminus A = \{1,9\}$.

On a $A \setminus \emptyset = A$, et $A \setminus A = \emptyset$. [4]

Complémentaire

Si A est inclus dans un ensemble E, l'ensemble $E \setminus A$ s'appelle complémentaire de A dans E. On le note $C_E(A)$ (on peut aussi le noter A^c ou $\bar{A}$, quand il n'y a pas ambiguité sur E). Soit $x \in E$. On a :

$$x \in C_E(A) \Leftrightarrow x \notin A$$

De manière équivalente :

$$x \notin C_E(A) \Leftrightarrow x \in A$$

Exemple 1 : Soit $E = \{1,2,3,4,5\}$. Soit $A = \{2,3\}$. On a $C_E(A) = \{1,4,5\}$. Soit $B = C_E(A)$. On a $C_E(B) = \{2,3\} = A$.

Exemple 2 : Soit $E = \mathbb{R}$. Soit $A = [0,1]$. On a $C_{\mathbb{R}}(A) = \{x \in \mathbb{R}, x \notin [0,1]\} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. Soit $B = C_E(A)$. On a $C_E(B) = [0,1] = A$

Dans les deux exemples précédents, $C_E(B) = C_E(C_E(A)) = A$. Ce n'est pas un hasard. En effet :

Proposition : soit E un ensemble. Soit $A \in E$. On a : $C_E(C_E(A)) = A$.

Preuve. Soit $x \in A$. On a $x \notin C_E(A)$ donc $x \in C_E(C_E(A))$. On a donc : $A \subset C_E(C_E(A)$. Réciproquement, soit $x \in C_E(C_E(A)$. On a $x \notin C_E(A)$ donc $x \in A$. Donc $C_E(C_E(A) \subset A$ et par double inclusion $A = C_E(C_E(A)$. ■

Remarque : le complémentaire dans E de l'ensemble vide est l'ensemble E tout entier. Le complémentaire dans E de E est l'ensemble vide : $C_E(\emptyset) = E$, $C_E(E) = \emptyset$

[4] Plus généralement, $A \subset B$ ssi $A \setminus B = \emptyset$.

Complémentaire de l'union, complémentaire de l'intersection.

Proposition : Soient E un ensemble, et A et B deux sous-ensembles de E. On a :

(a) $C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$.
(b) $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$

Ces propriétés se retiennent de la manière suivante :
- le complétaire de l'union est l'intersection des complémentaires
- le complémentaire de l'intersection est l'union des complémentaires

Preuve. Preuve du (a) : c'est intuitivement évident. En effet, l'ensemble de gauche et l'ensemble de droite sont tous les deux égaux à l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent ni à A ni à B. Voici toutefois une preuve rigoureuse, par double inclusion : si $x \in C_E(A \cup B)$, alors $x \notin A \cup B$ donc ($x \notin A$ et $x \notin B$) donc ($x \in C_E(A)$ et $x \in C_E(B)$) donc $x \in C_E A \cap C_E(B)$. On a donc $C_E(A \cup B) \subset C_E(A) \cap C_E(B)$. Le lecteur vérifiera que, réciproquement, si $x \in C_E A \cap C_E(B)$ alors $x \in C_E(A \cup B)$. Donc $C_E(A) \cap C_E(B) \subset C_E(A \cup B)$ et par double inclusion $C_E(A \cup B) \subset C_E(A) \cap C_E(B)$.

Preuve du (b) : Soit $x \in E$. On a : $x \in C_E(A \cap B)$ ssi $x \notin A \cap B$ ssi ($x \notin A$ ou $x \notin B$) ssi ($x \in C_E(A)$ ou $x \in C_E(B)$) ssi $x \in C_E(A) \cup C_E(B)$. ■

Plus généralement, si A_1, A_2,...,A_n sont des sous-ensembles de E,

$$C_E(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = C_E(A_1) \cap C_E(A_2) \cap .... \cap C_E(A_n)$$

et

$$C_E(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = C_E(A_1) \cup C_E(A_2) \cup .... \cup C_E(A_n)$$

Plus généralement encore, si I est un ensemble d'indices et pour tout i dans I, $A_i \subset E$:

$$C_E\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} C_E(A_i)$$

et

$$C_E\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} C_E(A_i)$$

En effet, dans la première égalité, l'ensemble de gauche et l'ensemble de droite sont tous les deux égaux à l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent à aucun des A_i. Dans la seconde égalité, l'ensemble de gauche et l'ensemble de droite sont tous les deux égaux à l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à tous les A_i.

4 Produit cartésien

Rappel : un couple est la donnée de deux objets dans un certain ordre. Bien noter que dans un couple, l'ordre compte : $(1,3) \neq (3,1)$. Un n-uplet est la donnée de n objets dans un certain ordre.

A partir de deux ensembles A et B, on crée un nouvel ensemble noté $A \times B$, dont les éléments sont les couples (a, b) constitués d'un élément a de A et d'un élément b de B, dans cet ordre.

$$A \times B = \{ \ (x, y), \ x \in A \text{ et } y \in B \ \} .$$

On l'appelle produit cartésien de A et de B.

Exemple 1 : si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 14\}$, alors

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 14), (2, 1), (2, 14), (3, 1), (3, 14)$$

et

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 14), (2, 1), (2, 14), (3, 1), (3, 14)\}$$

Exemple 2 : si $A = \{\text{saumon, poulet}\}$ et $B = \{\text{banane, orange}\}$, alors

$$A \times B = \{ \ (\text{saumon, banane}), (\text{saumon, orange}), (\text{poulet, banane}), (\text{poulet, orange}) \ \}$$

(Pour vous persuader de l'importance de l'ordre dans un couple, dites-vous que manger une banane après avoir mangé du saumon n'est pas la même chose que manger du saumon après avoir mangé une banane)

On peut généraliser cette construction à un nombre fini d'ensembles. Ainsi, si A_1, A_2,...,A_n sont des ensembles, on peut construire l'ensemble

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

dont les éléments sont des n-uplets $(a_1, a_2 \cdots, a_n)$ tels que $a_i \in A_i$ pour tout i dans $\{1, 2, ..., n\}$.

Cas particulier : $A \times A$ se note A^2, $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\text{fois}}$ se note A^n.

Par exemple on note $\mathbb{N}^2$ l'ensemble des couples d'entiers naturels et $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples de réels.

Exercice 2 *Soient A et B les intervalles : $A = [0, 1]$ et $B = [2, 5]$. Dessiner dans le plan $\mathbb{R}^2$ les ensembles $A \times B$ et $B \times A$. Bien noter que $A \times B \neq B \times A$.*