

Examen d'algèbre 1

Durée 2h. Tous documents et calculatrices interdits.

Les exercices sont indépendants. Le barème indiqué, sur 21 pts, est approximatif. Les réponses doivent être justifiées. Il sera tenu compte de la rédaction. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. **Il faut tourner la page !**

Exercice I (environ 2 pts)Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.**Exercice II** (environ 3 pts)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons INV_n l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$ARB \Leftrightarrow \exists P \in INV_n, A = BP$$

La relation $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence ?**Exercice III** (environ 6 pts)

1) (0,5 pt) Soient n et k des entiers non nuls. Soit I_n la matrice identité d'ordre n . Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(I_n - M)(I_n + M + M^2 + \dots + M^k) = I_n - M^{k+1}$.

2) (1,5 pt) Soient a et b des réels. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer M^2 et M^3 . Soit $A = I_3 + M + M^2$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

3) (2,5 pts) Soit $B = I_3 - M$. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) (1,5 pt) En utilisant les résultats du 2) et du 3), déterminer l'ensemble des vecteurs-colonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tels que $A^{10}X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice IV (environ 7 pts) (les questions 1), 2), 3) et 4) sont indépendantes les unes des autres)

1) (2 pts) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soient $z_1, z_2, \dots, z_m$ des complexes deux à deux distincts. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $P(z_i) = P'(z_i) = 0$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$P = (X - z_m)^2 Q \quad (*)$$

Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$, $Q(z_i) = Q'(z_i) = 0$ (on pourra dériver (*)).

2) (1,5 pt) Déterminer l'ensemble des quadruplets $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que le polynôme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ vérifie $P(0) = P'(0) = 0$ et $P(1) = P'(1)$.

3) (1,5 pts) Soit P le polynôme à coefficients complexes : $P = X^3 - X^2 + 2iX - 2i$. Vérifier que $P(1) = 0$, puis décomposer P en produit de polynômes de degré 1. (les racines de P pourront être données sous forme trigonométrique ou sous la forme $x + iy$).

4) Soient $z_1, z_2, \dots, z_m$ des complexes deux à deux distincts. Soient $z'_1, z'_2, \dots, z'_m$ des complexes.

4a) (1pt) Montrer qu'il existe au plus un polynôme P de degré inférieur ou égal à $m-1$ tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $P(z_i) = z'_i$.

4b) (1pt) Déterminer l'ensemble des polynômes P de degré au plus 2 tels que $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ et $P(3) = 3$.

Exercice V (environ 3 pts) (relativement difficile)

Soit E un ensemble quelconque. Soit $f : E \rightarrow E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Corrigé de l'examen d'algèbre 1 du 26 janvier 2006

Exercice I - Soit $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$ définie de la manière suivante : pour tout entier naturel n , $f(2n) = -n$ et $f(2n+1) = n+1$. Puisque tout entier naturel est soit pair soit impair, f est bien définie.

Montrons que f est bijective.

- f surjective : soit $p \in \mathbb{Z}$. Si $p \geq 1$, alors en posant $n = p-1$, on obtient : $2n+1 \in \mathbb{N}$ et $f(2n+1) = n+1 = p$. Sinon, $p \leq 0$, et en posant $n = -p$, on obtient : $2n \in \mathbb{N}$ et $f(2n) = -n = p$. Donc dans tous les cas, p a un antécédent par f . Donc f est surjective.

- f injective : soient n et p des entiers naturels tels que $f(n) = f(p)$. Nécessairement, n et p ont même parité (sinon l'un des deux nombres $f(n)$ et $f(p)$ est négatif et l'autre est supérieur ou égal à 1, donc ils ne sont pas égaux). Si n et p sont tous les deux pairs, alors $-n/2 = -p/2$ donc $n = p$; si n et p sont tous les deux impairs, alors $n+1 = p+1$ donc $n = p$. Donc dans tous les cas possibles, $n = p$, donc f est injective.

Donc f est bijective. Il existe donc une application bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$. Donc, par définition, $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Exercice II - Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. On note $\mathcal{M}_n$ pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- $\mathcal{R}$ réflexive : soit $A \in \mathcal{M}_n$. I_n est inversible et $A = AI_n$, donc $A\mathcal{R}A$, donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

- $\mathcal{R}$ transitive : soient A, B et C dans $\mathcal{M}_n$ telles que $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$. Il existe donc des matrices inversibles P_1 et P_2 dans $\mathcal{M}_n$ telles que $A = BP_1$ et $B = CP_2$. On a donc $A = BP_1 = CP_2P_1 = CP$ avec $P = P_2P_1$. Or $P \in \mathcal{M}_n$ et de plus, le produit de deux matrices inversibles est une matrice inversible, donc P est inversible. Donc $A\mathcal{R}C$. Donc $\mathcal{R}$ est transitive.

- $\mathcal{R}$ symétrique : soient A et B dans $\mathcal{M}_n$ tels que $A\mathcal{R}B$. Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n$ telle que $A = BP$. En multipliant cette égalité à gauche et à droite par P^{-1} on obtient : $AP^{-1} = BPP^{-1} = BI_n = B$. Posons $\tilde{P} = P^{-1}$. $\tilde{P}$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n$ et on vient de voir que $B = A\tilde{P}$. Donc $B\mathcal{R}A$. Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

Donc $\mathcal{R}$ est réflexive, transitive et symétrique. Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice III

1) On a

$$\begin{aligned}(I - M)(I + M + \dots + M^k) &= I(I + M + \dots + M^k) - M(I + M + \dots + M^k) \\ &= (I + M + M^2 + \dots + M^k) - (M + M^2 + \dots + M^{k+1}) \\ &= I - M^{k+1}\end{aligned}$$

(les autres termes s'éliminent).

2) $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = 0$ (matrice nulle). Or d'après le 1) avec $n = k = 3$, $(I_3 - M)A = I_3 - M^3$. Donc $(I_3 - M)A = I_3$. Donc A est inversible d'inverse $I_3 - M$.

3) I_3 commute avec M puisque $I_3M = M = MI_3$. Donc la formule du binôme de Newton est valable. On a :

$$B^n = (I_3 - M)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (I_3)^{n-k} (-M)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k (I_3)^{n-k} (-1)^k M^k$$

Or $M^3 = 0$ donc $M^k = 0$ pour tout $k \geq 3$. Donc pour tout $n \geq 2$,

$$B^n = I_3 - nM + \frac{n(n-1)}{2}M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -na & \frac{n(n-1)ab}{2} \\ 0 & 1 & -nb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus, $B^0 = I_3$ et $B^1 = B = I - M$ donc la formule ci-dessus est encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

4) D'après le 2), A est inversible et $A^{-1} = B$. Or si A est inversible alors A^k est inversible d'inverse $(A^{-1})^k$. Donc A^{10} est inversible d'inverse B^{10} . Il existe donc un unique vecteur colonne X tel que $A^{10}X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. C'est

$$X = B^{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -10a & 45ab \\ 0 & 1 & -10b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 10a + 45ab \\ 1 - 10b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice IV

1) On a $P(z_m) = P'(z_m) = 0$, donc z_m est racine au moins double de P , donc $(X - z_m)^2$ divise P , donc il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - z_m)^2 Q$. De plus, Q

est unique par unicité du quotient dans la division euclidienne de P par $(X - z_m)^2$. Soit $j \in \{1, \dots, m-1\}$. On a $P(z_j) = 0 = (z_j - z_m)Q(z_j)$. Comme $z_j - z_m \neq 0$, on a $Q(z_j) = 0$. De plus, en dérivant l'égalité $P = (X - z_m)^2 Q$ on obtient : $P' = 2(X - z_m)Q + (X - z_m)^2 Q'$. Donc $P'(z_j) = 0 = 2(z_j - z_m)Q(z_j) + (z_j - z_m)Q'(z_j)$. Comme $Q(z_j) = 0$, on obtient $Q'(z_j) = 0$.

2) On a $P(0) = d$, $P(1) = a + b + c + d$ et $P' = 3aX^2 + 2bX + c$ donc $P'(0) = c$ et $P'(1) = 3a + 2b$. Donc P vérifie $(**)$ si et seulement si (a, b, c, d) est solution du système :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 3a + 2b \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

En réarrangeant la première équation, en soustrayant la somme des deux dernières lignes à la première ligne, puis en divisant la première ligne par 2, on obtient :

$$\begin{cases} a + \frac{b}{2} = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

P vérifie donc $(**)$ si et seulement si $(a, b, c, d) \in \{(-b/2, b, 0, 0), b \in \mathbb{R}\}$.

3) On a $P(1) = 1 - 1 + 2i - 2i = 0$. Donc $X - 1$ divise P . Il existe donc des complexes a, b, c tels que $P = (X - 1)(aX^2 + bX + c)$. En identifiant les coefficients de P avec ceux du polynôme obtenu en développant le membre de droite, on obtient : on obtient : $P = (X - 1)(X^2 + 2i)$. De plus, les racines de $X^2 + 2i$ sont les complexes z tels que : $z^2 = -2i = 2e^{-i\pi/2}$, c'est à dire : $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} = 1 - i$ et $z_2 = -z_1 = -1 + i$. On obtient donc : $P = (X - 1)(X - 1 + i)(X + 1 - i)$.

Remarque : z_2 n'est pas le conjugué de z_1 : ça n'a rien de choquant, puisque P n'est pas un polynôme à coefficients réels.

4)

4a) Supposons qu'il existe deux polynômes P et Q de degré inférieur ou égal à $m - 1$ tels que, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $P(z_i) = Q(z_i) = z'_i$. On a $\deg(P - Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)) \leq m - 1$. Donc si $P - Q \neq 0$, $P - Q$ a au plus $m - 1$ racines distinctes. Mais pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $(P - Q)(z_i) = 0$, donc $P - Q$ a au moins m racines distinctes. Donc $P - Q = 0$, donc $Q = P$. Il existe donc bien au plus un polynôme P de degré au plus $m - 1$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $P(z_i) = Q(z_i) = z'_i$.

4b) Le polynôme $P = X$ convient. De plus, d'après la question 4a), avec $m = 2$ et $z_i = z'_i = i$ pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, il existe au plus un polynôme qui satisfait les conditions du 4b). Donc $P = X$ est l'unique solution.

Exercice V

Supposons f injective. Soit $x \in E$. Posons $y = f(x)$ et $z = f \circ f(x)$. On a $f(z) = f \circ f \circ f(x) = f(x)$. Or f est injective. Donc $z = x$. Donc $f \circ f(x) = x$. Donc $f(y) = x$. Donc x a au moins un antécédent : y . Comme ceci est vrai pour tout x de E , f est surjective.

Supposons f surjective. Soit y et y' des éléments de E tels que $f(y) = f(y')$. Puisque f est surjective, il existe x dans E tel que $y = f(x)$. On a $f \circ f(y) = f \circ f \circ f(x) = f(x) = y$. Donc $f \circ f(y) = y$. De même, $f \circ f(y') = y'$. Or puisque $f(y) = f(y')$, on a $f \circ f(y) = f \circ f(y')$. Donc $y = y'$. Donc f est injective.

On a bien montré que f est injective ssi f est surjective.