DUMI2E Exercices Algèbre 1 2007-2008

1 Ensembles, Applications, Relations

Exercice 1.1 Soient $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{7, 3, 2\}$ et $C = \{8, 1, 3, 7\}$. Calculer $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cap B$, $B \cap C$, $C_A(B)$ et $B \backslash C$.

Exercice 1.2 Soient $A = \{3, 5, 7, 9\}$, et $B = \{2, 5, 9\}$. Calculer $A \times B$ et $B \times A$.

Exercice 1.3 Soient A un ensemble, et X, Y et Z des parties de A. Démontrer les propriétés suivantes :

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$
$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$
$$C_A(C_A(X)) = X,\ C_A(X \cap Y) = C_A(X) \cup C_A(Y),\ C_A(X \cup Y) = C_A(X) \cap C_A(Y)$$
$$X \subset Y \iff C_A(Y) \subset C_A(X)$$

Exercice 1.4 Soient A un ensemble et X, Y, Z des parties de A.
a) Donner un exemple où : $X \cup Y = X \cup Z$ et $Y \neq Z$.
b) Donner un exemple où : $X \cap Y = X \cap Z$ et $Y \neq Z$.
c) Démontrer que

$$(X \cup Y = X \cup Z \quad \text{et} \quad X \cap Y = X \cap Z) \quad \Longrightarrow Y = Z\ .$$

Exercice 1.5 Soit $E = \{a\}$ un ensemble à un élement. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

Exercice 1.6 Soit $A = \{0, 1, 2\}$, et $B = \{0, 1\}$. Enumérer les applications de A dans B, puis les applications de B dans A.

Exercice 1.7 Les applications suivantes sont-elles bien définies ? Si oui, sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?($\mathbf{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs).
1) $f : \{0,1,2\} \to \{1,8,-1,24\}$ telle que $f(0) = -1$, $f(1) = 24$, $f(2) = 1$.
2) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$
$\quad n \mapsto -n$
3) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$\quad n \mapsto n+1$
4) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$\quad n \mapsto n-1$
5) $f : \mathbb{N} \to \{-1,+1\}$ qui à tout n de $\mathbb{N}$ associe 1 si n est pair, et -1 si n est impair.

Exercice 1.8 L'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
$$(n,p) \longmapsto n+p$$
est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 1.9 Pour chacune des applications 1), 2), 3) et 5) de l'exercice 1.7, calculer : $f(\{2\})$, $f(\{0,2\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{-1,1\})$.

Exercice 1.10 Soit f une application de A vers B. Démontrer que $A = \bigcup\limits_{y \in B} f^{-1}(\{y\})$.

Exercice 1.11 Soit f une application de E vers F.
a) A et B étant des parties de E, trouver des inclusions ou des égalités entre $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$ d'une part, $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$ d'autre part.
b) C et D étant des parties de F, trouver des relations analogues entre : $f^{-1}(C \cup D)$, $f^{-1}(C \cap D)$ et $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$, $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Exercice 1.12 L'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto g(x) = xe^{-x}$$
est-elle injective, surjective ? (On pourra avec profit construire le tableau de variation de g et utiliser des résultats d'analyse). Calculer $g^{-1}(\{-e\})$, $g^{-1}(\{1\})$, $g(\mathbb{R}_+)$ et $g^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 1.13 Soient E, F, G, H des ensembles et f, g, h des applications telles que :
$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$
Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 1.14 Soit f une application de E vers F. Démontrer les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \text{ est injective } &\iff \forall A \subset E, A = f^{-1}(f(A)) \\ f \text{ est surjective } &\iff \forall B \subset F, B = f(f^{-1}(B)) \end{aligned}$$

Exercice 1.15 Soit f une application de E vers F. Montrer que s'il existe une application g de F vers E telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, alors f est bijective et $g = f^{-1}$.

Exercice 1.16 Soit f une application de E vers F et A une partie de E.
a) Démontrer qu'il n'y a en général pas d'inclusion entre $f(C_E(A))$ et $C_F(f(A))$.
b) Toutefois, démontrer : f bijective $\iff \forall A \in \mathcal{P}(E),\ f(C_E(A)) = C_F(f(A))$.

Exercice 1.17 Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) .$$

a) L'application f est-elle injective ? surjective ?
b) Calculer l'image réciproque de $\{i\}$ par f.
c) Déterminer l'image directe du cercle unité U par f.
d) On note H le complémentaire dans $\mathbb{C}$ du segment $[-1, 1]$, et on note D l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^*, |z| < 1\}$. Montrer que l'on peut définir l'application :

$$\begin{array}{rcl} g : D & \longrightarrow & H \\ z & \mapsto & f(z) \end{array}$$

e) Montrer que g est bijective. (On pourra remarquer que le produit des racines de l'équation $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ est 1).

Exercice 1.18 L'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$(x, y) \longmapsto (x + y, xy)$
est-elle injective, surjective ? bijective ?

Exercice 1.19 *Fonction caractéristique.*
Soit E un ensemble. A toute partie A de E on associe l'application f_A de E dans $\{0, 1\}$ définie par $f_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $f_A(x) = 0$ sinon.
i) Soit $A \subset E$. Exprimer la fonction caractéristique de $C_E(A)$ en fonction de f_A.
ii) Soit A et B deux parties de E. Exprimer en fonction de f_A et f_B les fonctions caractéristiques de $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$.

Exercice 1.20 *Différence symétrique de deux parties.*
Soit E un ensemble. Pour A et B des parties de E, on note $A\Delta B$ l'ensemble $(A\cup B)\backslash(A\cap B)$. Soient A, B et C des parties de E. Montrer que :

$$A\Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$$
$$A\Delta\emptyset = A,\ A\Delta B = B\Delta A,\ A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$$
$$A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$$

Exercice 1.21 Soit $(A_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de parties d'un ensemble E.
Comparer $\bigcap_{i\in I}\Big(\bigcup_{j\in J} A_{ij}\Big)$ et $\bigcup_{j\in J}\Big(\bigcap_{i\in I} A_{ij}\Big)$.

Exercice 1.22 Les relations suivantes, définies sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, sont-elles des relations d'ordre ? Préciser si l'ordre est total ou partiel :
a) $(a,b)\,\mathcal{T}\,(c,d) \iff a+b\leq c$.
b) $(a,b)\,\mathcal{U}\,(c,d) \iff a<c$ ou $b+c\leq a+d$.
c) $(a,b)\,\mathcal{V}\,(c,d) \iff a\leq c$ et $a+b\leq c+d$.

Exercice 1.23 Sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels muni de la relation d'ordre usuelle, on considère les trois sous-ensembles $A_1=[a,b]$, $A_2=]a,b[$, et $A_3=]a,+\infty[$, où a et b sont deux réels fixés tels que $a<b$. Déterminer les majorants, minorants, plus grand élément, plus petit élément, borne supérieure et borne inférieure de ces sous-ensembles.

Exercice 1.24 On admet que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure (on considère la relation d'ordre usuelle). Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$, avec $A\subset B$ et B majorée.
i) Montrer que A est majorée et que $\sup A\leq\sup B$.
ii) Trouver un résultat analogue pour les bornes inférieures.

Exercice 1.25 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ (muni de la relation d'ordre usuelle) admettant chacune une borne supérieure.
i) Montrer que $A\cup B$ a une borne supérieure et que :

$$\sup(A\cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

ii) On définit

$$A+B = \{x\in\mathbb{R}, \exists(a,b)\in A\times B, x=a+b\}$$

Montrer que $A+B$ a une borne supérieure et que

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

Exercice 1.26 Soit $(a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ une famille de réels. On définit

$$A = \min_{1\leq i\leq n}\big(\max_{1\leq j\leq p} a_{ij}\big), \quad B = \max_{1\leq j\leq p}\big(\min_{1\leq i\leq n} a_{ij}\big)$$

Montrer que $B \leq A$.

Exercice 1.27 *Ordre lexicographique.* Soit E un ensemble totalement ordonné par une relation notée $\leq$. On munit le produit cartésien $E\times E$ de la relation $\mathcal{R}$ définie par $(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y')$ ssi ($x\leq x'$ et $x\neq x'$) ou ($x=x'$ et $y\leq y'$). Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total.

Exercice 1.28 Soit E un ensemble non vide et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E muni de la relation d'inclusion $\subset$.
a) Montrer que $(\mathcal{P}(E),\subset)$ est un ensemble ordonné.
b) Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$. Déterminer les bornes supérieure et inférieure de $\mathcal{A}$ dans $(\mathcal{P}(E),\subset)$.

Exercice 1.29 On munit $\mathbb{R}^2$ des deux relations binaires :

$$(x,y)\mathcal{R}_1(x',y') \iff x\leq x' \text{ et } y\leq y' \text{ (ordre produit)}$$
$$(x,y)\mathcal{R}_2(x',y') \iff x< x' \text{ ou } (x=x' \text{ et } y\leq y') \text{ (ordre lexicographique)}$$

i) Soit (a,b) donné dans $\mathbb{R}^2$. Identifier et représenter les ensembles :

$$X_{ab} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, (x,y)\mathcal{R}_1(a,b)\}$$
$$Y_{ab} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, (x,y)\mathcal{R}_2(a,b)\}$$

ii) Vérifier qu'il s'agit bien de relations d'ordre. Lequel est total ? Lequel est partiel ?
iii) Montrer que dans $\mathbb{R}^2$ muni de l'ordre produit, toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure. Est-ce vrai pour l'ordre lexicographique ?

Exercice 1.30 Montrer que les relations suivantes sont des relations d'équivalence et préciser les classes d'équivalence.
a) sur $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \iff \cos x = \cos y$;
b) sur $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \iff E(x) = E(y)$, où $E(x)$ dénote la partie entière de x ;
c) sur $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$, $(p,q)\mathcal{R}(p',q') \iff pq' = p'q$;
d) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x_1,x_2)\mathcal{R}(x_1',x_2') \iff x_1x_2 = x_1'x_2'$

Exercice 1.31 On considère une partition $\mathcal{P}$ d'un ensemble E, c'est-à-dire une famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de E telle que :
$E = \cup_{i\in I} A_i$ et $\forall i \in I, \forall j \in I$ t.q. $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.
On définit alors la relation $\mathcal{R}$ sur E par :

$$x\mathcal{R}y \iff \exists i \in I \text{ tel que } x \in A_i \text{ et } y \in A_i$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
Quelles en sont les classes d'équivalence ?

2 Nombres Entiers et Complexes

Exercice 2.1 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n \geq 4, \ n! \geq 2^n.$$

Exercice 2.2 Démontrer par récurrence les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Exercice 2.3 Montrer que si un ensemble E a n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ a 2^n éléments.

Exercice 2.4 Intervertir les symboles $\sum$ dans les sommations suivantes :
a) $\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{i} a_{ij}\Big)$ b) $\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=i+1}^{n+1} a_{ij}\Big)$.

Exercice 2.5 a) Montrer que : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$, puis que : $\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$.
b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ des réels positifs tels que $x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} \leq n + 1$. Montrer que :

$$x_1 + ... + x_n \leq n\alpha, \quad \text{où } \alpha = 1 + \frac{1}{n} - \frac{x_{n+1}}{n}.$$

c) Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1 \in \mathbb{R}_+, ..., \forall x_n \in \mathbb{R}_+$,

$$x_1 + \cdots + x_n \leq n \implies x_1 x_2 \cdots x_n \leq 1$$

d) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs. Comparer leur moyenne géométrique $(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$ et leur moyenne arithmétique $\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$.

Exercice 2.6 *(difficile)* On forme une suite de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de la façon suivante : $(0,0), (0,1), (1,0), (0,2), (1,1), (2,0), (0,3), (1,2), (2,1), (3,0)$ etc. En associant à chaque élément de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sa position dans la suite, on obtient l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (i,j) & \mapsto & \dfrac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i \; . \end{array}$$

Montrer que f est bijective.

Exercice 2.7 On munit $\mathbb{N}$ de la relation de divisibilité définie par : $\forall x, y \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$x | y \iff \exists k \in \mathbb{N}, y = kx$$

Montrer que $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.
Calculer si ils existent le plus grand élément, le plus petit élément, l'ensemble des majorants et des minorants des sous-ensembles suivants :

$$A = \{4, 8, 12\}, B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}, C = \{2, 3, 6, 9, 18\}$$

Exercice 2.8 Calculer les racines carrées de $-2 + 2\sqrt{3}i$, puis celles de $9i$.

Exercice 2.9 Résoudre l'équation $z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - (1 + i\sqrt{3}) = 0$.
a) Exprimer les racines z_1 et z_2 en fonction des nombres complexes $a = (\sqrt{3} + i)/2$ et $b = (-1 + i\sqrt{3})/2$.
b) Déterminer le module et l'argument de ces racines.
En déduire les valeurs de $\cos(5\pi/12)$, $\sin(5\pi/12)$, $\cos(11\pi/12)$ et $\sin(11\pi/12)$.

Exercice 2.10 Soit δ une racine carrée du nombre complexe z. Trouver les racines carrées de $-z$, $(1+i)z$ et z^3 en fonction de δ.

Exercice 2.11 Montrer que si a et b sont deux nombres complexes de module 1 tels que $ab \neq -1$, alors $\dfrac{a+b}{1+ab}$ est réel.

Exercice 2.12 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$, $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}$.

Exercice 2.13 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

Exercice 2.14 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Développer $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$; en déduire que $\cos(n\theta)$ est un polynôme en $\cos\theta$ et calculer ce polynôme pour $n = 1, 2, 3, 4$.

Exercice 2.15 Soit U^* le cercle unité de $\mathbb{C}$ privé du point -1.

$$U^* = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1, z \neq -1\}$$

On considère l'application :
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1-ix}{1+ix}$$
i) Calculer, pour tout réel x, le module de $f(x)$. L'application f est-elle surjective ? injective ? Peut-on avoir $f(x) = -1$?
ii) Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans U^* telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x)$. Montrer que g est bijective.
iii) On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur U^* par :

$$z\mathcal{R}t \text{ si et seulement si } g^{-1}(z) \leq g^{-1}(t)$$

$\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? transitive ? une relation d'ordre ?

Exercice 2.16 Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(x+i)^n = (x-i)^n$$

Exercice 2.17 Ecrire, sous forme d'une application de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, les transformations géométriques suivantes :

a) rotation de centre A$(1+i)$, d'angle $-\pi/4$

b) homothétie de centre B$(-2i)$, de rapport $1/3$

c) symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.18 Soit f l'application de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :
$z \mapsto f(z) = \dfrac{ln|z|}{z^2}$.
$i)$ On pose $z = re^{it}$, avec $r \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ et $t \in \mathbb{R}$. Calculer le module et l'argument de $z' = f(z)$. L'application f est-elle injective ?
$ii)$ Soit R un réel strictement positif. On pose $E = \{z \in \mathbb{C}^*, |z| = R\}$. Déterminer l'image directe $f(E)$ de E par f. Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice 2.19 Démontrer l'égalité du parallélogramme :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}, |a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

Exercice 2.20 Soient r_1 la rotation de centre A$(1-i)$, d'angle $\pi/2$ et r_2 la rotation de centre B$(1+i)$, d'angle $\pi/2$.

a) Définir les transformations complexes correspondant à r_1 et r_2.

b) Calculer $r_1 \circ r_2$ et $r_2 \circ r_1$ et les caractériser géométriquement.

c) Calculer $r_1 \circ r_2 \circ r_1^{-1}$ et la caractériser géométriquement.

Exercice 2.21 Trouver l'ensemble des nombres complexes z tels que les points d'affixes $z,\ z^2,\ z^3$ soient alignés.

Exercice 2.22 Représenter géométriquement l'ensemble suivant :
$\{z \in \mathbb{C}, |z-i| + |z+1| = 2\}$

Exercice 2.23 Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \ f(z) = \frac{2}{\bar{z}}.$$

a) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $f \circ f(z) = z$.

b) f est-elle bijective ? Si oui, calculer f^{-1}.

c) Soit R un réel strictement positif, et C le cercle $\{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$. Calculer $f(C)$.

d) Quel est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^*, f(z) = z\}$?

Exercice 2.24 Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe $z = x + iy$, avec x et y réels, associe :

$$f(z) = \frac{1}{2}(e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}).$$

1. Montrer que pour tout z <u>réel</u>, $f(z) = \cos(z)$.
2. Soit z dans $\mathbb{C}$. Montrer que $f(z + 2\pi) = f(z)$, que $f(-z) = f(z)$, et que $f(2z) = 2(f(z))^2 - 1$.
3. f est-elle injective ?
4. Calculer $f^{-1}(\{0\})$.

3 Polynômes

Exercice 3.1 Soient P et Q deux polynômes de $K[X]$, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer par récurrence que la formule du binôme de Newton est vraie dans $K[X]$: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(P + Q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P^k Q^{n-k}$$

Exercice 3.2 Soient p et q deux réels fixés et $A \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme $A = X^3 + pX + q$.
Montrer que A admet au moins une racine réelle.
Déterminer en fonction de (p, q) le nombre de racines réelles de A.

Exercice 3.3 Soient a et b deux réels distincts et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de a, b, $P(a)$ et $P(b)$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$ en fonction de a, $P(a)$ et $P'(a)$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, quel est le reste de la division de $P_n = X^n + X + b$ par $(X - a)$?

Exercice 3.4 Calculer le reste de la division euclidienne de A par B où $n \geq 2$, $A = X^n + X + 1$ et $B = (X - 1)^2$? Pour p et q entiers tels que $p > q$, quel est le reste de la division de $X^p + X^q + 1$ par $X^2 + X$?

Exercice 3.5 Soit

$$P = \frac{X^n(4 - 2X)^n}{n!}$$

où n est un entier strictement positif.

a) Montrer que les $n-1$ premières dérivées de P sont nulles pour $x=0$ et $x=2$.
b) Ecrire la formule de Taylor pour P au point 0 et au point 2.
c) En déduire que toutes les dérivées de P prennent des valeurs entières pour $x=0$ et $x=2$.

Exercice 3.6 Soit $n \geq 3$. Déterminer un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $P(1)=3$, $P'(1)=4$, $P''(1)=5$ et $P^{(k)}(1)=3$ si $k \in \{3,..,n\}$. Un tel polynôme est-il unique ?

Exercice 3.7 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes :

$$X^4+2X^3-X-2$$
$$X^5+X^4+2X^3+2X^2+X+1$$
$$X^{2n}-1$$
$$X^4+X^2+1$$
$$X^8+X^4+1$$
$$X^4-2X^2\cos(2a)+1 \qquad \text{où } a \in \mathbb{R}$$

Exercice 3.8 Déterminer le degré du polynôme $P=(X+1)^7-X^7-1$.
Montrer que P est divisible par $X-j$ où $j=e^{2i\pi/3}$.
Déterminer deux racines réelles entières de P en précisant les ordres de multiplicité. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3.9 Montrer qu'un polynôme réel de degré 3 admettant une racine double dans $\mathbb{C}[X]$ a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.10 Soit $P=X^3-3X+1$ et soient a, b, c les trois racines de P dans $\mathbb{C}[X]$. On ne cherchera pas à calculer ces racines.
Montrer que a, b et c sont distinctes.
Calculer $A=a+b+c$, $B=ab+ac+bc$, $C=abc$.

Exercice 3.11 Soit $A=X^5+X^4+aX^3+bX^2+5X-2$ et $B=X^3-2X+1$. Peut-on déterminer a et b pour que B divise A ?

Exercice 3.12 Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X)P(X+2)+P(X^2)=0$. (On montrera que si α est racine de P, alors α^2 est racine de P, puis que la seule racine possible est 1.)

Exercice 3.13 En développant de deux façons différentes le polynôme

$$P = (X+1)^{(p+q)} = (X+1)^p (X+1)^q \ ,$$

montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, \forall q \geq n,$

$$C_{p+q}^{n} = \sum_{k=0}^{n} C_p^k C_q^{n-k} \ .$$

(Cette égalité est connue sous le nom d'égalité de Van der Monde.)

Exercice 3.14 Quel est l'ordre de multiplicité de 1 en tant que racine du polynôme $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$?

Exercice 3.15 Factoriser le polynôme réel

$$P_n = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \cdots + \frac{X(X+1)\cdots(X+n-1)}{n!} \ .$$

Faire un raisonnement par récurrence.

Exercice 3.16 Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme à coefficients complexes $P = X^4 + aX^3 + b$ admette une racine multiple.

Exercice 3.17 Déterminer les polynômes de degré 3 de $\mathbb{R}[X]$ divisibles par $Q = X + 1$ et dont les restes des divisions euclidiennes par $X + 2$, $X + 3$ et $X + 4$ sont égaux.

Exercice 3.18 Soient n un entier supérieur à 3, et P un polynôme de degré n à coefficients réels tel que $P(0) = 1$ et $P'(1) = 0$.
a) Montrer qu'il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = XQ + 1$.
b) Montrer que $Q(1) + Q'(1) = 0$.
c) Montrer que $Q(X) = (X-2)Q'(1) + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{Q^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k$.
d) En déduire qu'il existe des réels uniques a_1,...,a_{n-1} tels que :

$$P = 1 + a_1 X(X-2) + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{a_k}{k!} X(X-1)^k.$$

Exercice 3.19 a) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^3 - 3X^2 + 4$.
Dans la suite de l'exercice, on considère la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall Q \in \mathbb{R}[X], \qquad P \,\mathcal{R}\, Q \Longleftrightarrow X^3 - 3X^2 + 4 | P - Q.$$

b) Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que :

$$P \,\mathcal{R}\, Q \Longleftrightarrow\ P(2) = Q(2), P'(2) = Q'(2) \text{ et } P(-1) = Q(-1).$$

c) Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que l'on a $P \,\mathcal{R}\, Q$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de P par $X^3 - 3X^2 + 4$ est égal au reste de la division euclidienne de Q par $X^3 - 3X^2 + 4$.
d) $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}[X]$?
e) Soient P, Q, U, V des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P \,\mathcal{R}\, Q$ et $U \,\mathcal{R}\, V$. Montrer que $PU \,\mathcal{R}\, QV$.

4 Matrices

Systèmes linéaires

Exercice 4.1 Résoudre les systèmes suivants : (a, b et m sont des paramètres réels).

$$\begin{cases} 2x & +y & +2z & = 7 \\ x & +y & +z & = 4 \\ -2x & +y & -2z & = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x & +y & +2z & = 7 \\ x & +y & +2z & = 4 \\ -2x & +y & -z & = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & -2y & +3z & -4t & = 4 \\ & y & -z & +t & = -3 \\ x & +3y & & -3t & = 1 \\ x & +2y & +z & -4t & = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = 1 \\ x & +2y & +z & = 2 \\ 3x & +4y & +5z & = a \\ & y & +3z & = b \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +(2m-1)z & =1 \\ mx & +y & +z & =-1 \\ x & +my & +z & =3(m+1) \end{array}\right.$$

Calculs élémentaires sur les matrices

Exercice 4.2 On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, et $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Effectuer tous les produits de ces matrices deux à deux lorsqu'ils existent.

Exercice 4.3 Comparer AB et BA pour les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.4 Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ une matrice de $M_{n,1}$ et $X = (x_1, \ldots, x_n)$ une matrice de $M_{1,n}$. Vérifier que les deux produits UX et XU sont possibles et calculer les.

Exercice 4.5 Soit A une matrice de $M_{n,p}$.
a) Si I_n est la matrice unité d'ordre n, montrer que $I_nA = A$ puis que $AI_p = A$.
b) Soit E_{ij} la matrice élémentaire de M_n dont tous les coefficients valent 0, sauf celui situé sur la ligne i et la colonne j, qui vaut 1. Calculer $E_{ij}A$. On note ici F_{ij} la matrice élémentaire de M_p définie de manière analogue. Calculer AF_{ij}.

Exercice 4.6 a) Déterminer deux matrices A et B de $M_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Calculer AB et BA. A-t-on $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Exercice 4.7 Puissance de matrice et formule du binôme : Soit A une matrice de M_n. On définit les puissances de A par récurrence :

$$A^0 = I_n \ , \ A^1 = A \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}, \ \ A^{p+1} = A^p A = AA^p.$$

On dit que deux matrices A et B de M_n commutent si $AB = BA$. Montrer que si A et B commutent, la formule du binôme de Newton est vraie :

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k} \ \text{ avec } \ C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}.$$

Exercice 4.8 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = A - I_3$. Pour n entier naturel, calculer J^n, puis A^n.

Exercice 4.9 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 4.10 Soient A et B deux matrices de M_n. Effectuer les produits :

$$(A+B)^2 \ , \ (A-B)(A+B) \ , \ (A-B)^2 \ , \ (AB)^2 \text{ et } (I + A + \ldots + A^k)(I - A).$$

Exercice 4.11 Soient A et B deux matrices de M_n triangulaires inférieures. Montrer que leur somme et leur produit sont aussi triangulaires inférieures.

Exercice 4.12 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée de M_n. On appelle trace de A, et on note $tr(A)$ le nombre réel :

$$tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Montrer que : $\forall A \in M_n$, $\forall B \in M_n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B), \qquad tr(\lambda A) = \lambda tr(A), \qquad tr(AB) = tr(BA).$$

Exercice 4.13 Soient A et B deux matrices carrées réelles, de format $n \times n$, avec $tr(A) \neq -1$. Déterminer les matrices $X \in M_n(\mathbb{R})$ telles que

$$X + (tr(X))A = B .$$

Exercice 4.14 a) Montrer que, pour toute matrice A de $M_{n,p}$, les produits $A(A^T)$ et $(A^T)A$ sont des matrices carrées symétriques. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AA^T et A^TA.
b) Montrer que toute matrice carrée B peut s'écrire de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique S et d'une matrice antisymétrique T. Déterminer S et T si $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Inverse de matrices

Exercice 4.15 a) La somme de deux matrices inversibles est-elle toujours inversible ?
b) Montrer que si une matrice A de M_n est inversible, alors toutes les puissances de A sont inversibles.

Exercice 4.16 Déterminer l'inverse (quand il existe) des matrices suivantes par la méthode du pivot :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.17 a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer A^2. En déduire que A n'est pas inversible. Calculer A^n pour n entier naturel.
b) Soit $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice N telle que : $B = I + N$, puis calculer $(I - N)(I + N)$. En déduire que B est inversible et calculer son inverse, puis B^{100}.

Exercice 4.18 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
b) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
c) Déterminer en fonction de n et des termes initiaux les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par u_0 , v_0 et la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 5u_n - 2v_n \end{cases}$$

Exercice 4.19 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
a) Calculer $A^3 - 6A^2 + 12A$.
b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 4.20 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On note I la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$, et 0 la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$.
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^2 + A + I = 0.$$

a) Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = -A - I$.
b) Montrer que $A^3 = I$.
c) Calculer, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, A^p en fonction de A et I.

Exercice 4.21 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
a) Calculer A^2 puis A^3.
b) A est-elle inversible ?
c) On note I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $(A + I)^{10}$.

UNIVERSITE PARIS-DAUPHINE MD1. 13 Novembre 2003

Examen Partiel d'Algèbre 1

Durée 2h : tous documents et calculatrices interdits.

Les trois exercices sont indépendants. Le barême indiqué est approximatif.

Exercice 1 ($\sim$ 5 points) :
Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; f \circ f(n) = n + 1.$$

On note $p = f(0) \in \mathbb{N}$.

1.a) Montrer que $f(p) = 1$ et que $f(1) = p + 1$.
1.b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(\, f(p+k) = k+1$ et $f(k+1) = p+k+1\,)$.
1.c) Aboutir à une contradiction et en déduire qu'une telle application f n'existe pas.

Exercice 2 ($\sim$ 11 points) :
Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \;\; f(z) = z^3 + 10e^{i\pi/4}.$$

2.a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 = 4\sqrt{2}(1+i).$$

2.b) Calculer $f^{-1}(\{18e^{i\pi/4}\})$. f est-elle injective ?
2.c) f est-elle surjective ?
Dans la suite de l'exercice, on fixe un réel R strictement positif, et on note C le cercle $\{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$.
2.d) Montrer que : $f(C) = \{z \in \mathbb{C}, |z - 10e^{i\pi/4}| = R^3\}$.
2.e) On suppose dans cette question que $R < 2$. Montrer que $f(C) \bigcap C = \emptyset$.
2.f) On suppose dans cette question que $R = 2$. Calculer $f(C) \bigcap C$.

Exercice 3 ($\sim$ 5 points) :
On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{C}$ par :
$\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}$,

$$z \mathcal{R} z' \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists \lambda \in [0,1], z^n = \lambda z'^n.$$

3.a) La relation $\mathcal{R}$ est-elle reflexive ?
3.b) La relation $\mathcal{R}$ est-elle antisymétrique ?
3.c) La relation $\mathcal{R}$ est-elle transitive ?

UNIVERSITE PARIS-DAUPHINE MD1. 15 Novembre 2002

Examen Partiel d'Algèbre 1

Durée 2h : tous documents et calculatrices interdits.

Les trois exercices sont indépendants. Le barème indiqué est approximatif.

Exercice 1 ($\sim$ 9 points) :
Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{2}(1 - i + z + i\bar{z}).$$

On note $D = \{z \in \mathbb{C}, f(z) = z\}$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(i)$. f est-elle injective ?

2. Soit z dans $\mathbb{C}$. Calculer $\overline{f(z)}$, puis montrer que $f \circ f(z) = f(z)$.

3. Montrer que $f(\mathbb{C}) = D$.

4. Quel est l'ensemble $f^{-1}(D)$?

5. f est-elle surjective ?

Exercice 2 ($\sim$ 3 points) :
Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$. On note r_1 le reste de la division euclidienne de a par b, et on note r_2 le reste de la division euclidienne de b par a.
a) Montrer que : $a < b \Longrightarrow r_1 = a$.

b) On suppose $r_1 = r_2$. Montrer que $a = b$.

Exercice 3 ($\sim$ 8 points) :
On note $E = [0, 2\pi[$. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur E par :
$\forall x \in E, \forall x' \in E,$

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow (\ \cos(x) \leq \cos(y) \text{ et } \sin(x) \leq \sin(y)\ ).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E. Est-ce une relation d'ordre totale ?

2. Montrer que pour tout x dans $[\pi, 2\pi[$, on a $x\mathcal{R}0$.
Montrer que pour tout x dans $[\pi/2, 3\pi/2]$, on a $x\mathcal{R}\pi/2$.

3. Soient x dans $[0, \pi/2]$, et y dans E tels que $x\mathcal{R}y$. Montrer que $x = y$.

4. Quels sont les éléments maximaux de E pour la relation $\mathcal{R}$?

UNIVERSITE PARIS-DAUPHINE
UFR MD. MD1. 15 Novembre 2001

Examen Partiel d'Algèbre 1

Durée 2h : tous documents et calculatrices interdits.

Les trois exercices sont indépendants. Le barème indiqué est approximatif.

Exercice 1 ($\sim$ 6,5 points) : On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pour tout complexe z dans $\mathbb{C}^*$, on note Arg(z) l'unique argument de z dans $[0, 2\pi[$.
Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe $z = a + ib$ (avec a et b réels) associe $f(z) = e^{-b}e^{ia}$.
1. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

2. On définit l'application h de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout z de $\mathbb{C}^*$ associe :
$$h(z) = \mathrm{Arg}(z) - i \ln(|z|).$$
Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}^*, f \circ h(z) = z$.

3. Soit b dans $\mathbb{R}$. On note $D = \{z \in \mathbb{C}, \Im\mathrm{m}(z) = b\}$, et $C = \{z \in \mathbb{C}, |z| = e^{-b}\}$. Montrer que $f(D) = C$.

Exercice 2 ($\sim$ 6,5 points) :
On note $B = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$, et on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur B par : $\forall z \in B, \forall z' \in B$,

$$z\mathcal{R}z' \iff \text{il existe } k \text{ réel dans } [0,1] \text{ tel que } z = kz'$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur B.

2. B admet-il un plus petit élément pour la relation $\mathcal{R}$?

3. Soit z dans B tel que $|z| < 1$. Montrer qu'il existe z' dans B tel que : $z \neq z'$ et $z\mathcal{R}z'$.
4. Quels sont les éléments maximaux de B pour la relation $\mathcal{R}$? B admet-il un plus grand élément pour la relation $\mathcal{R}$?

Exercice 3 ($\sim$ 7 points) : Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(n+1) = f(f(n)) + 1.$$

1) Soit n dans $\mathbb{N}$. On suppose que $f(n) = n$. Montrer que $f(n+1) = n+1$.

2.a) Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geq 1, f(b) \leq f(n)$.
On fixe un tel b dans les questions suivantes.
2.b) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$f(b) > f(n) \Longrightarrow n = 0$$

2.c) Montrer que : $f(b) > f(f(b-1))$.
2.d) En déduire que $f(b) > 0$, et que $f(b-1) = 0$.
2.e) En déduire que $b = 1$.

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$.

UNIVERSITE PARIS-DAUPHINE MD1. 21 Janvier 2004

Examen Final d'Algèbre 1

Durée 2h : tous documents, téléphones et calculatrices interdits.
Les trois exercices sont indépendants. Le barème indiqué est approximatif.

Problème ($\sim$ 11 points) :
I) On se place dans $M_2(\mathbb{R})$, et on note I_2 la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$. On définit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I_2.$$

Ia) Calculer B. Calculer B^n pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Ib) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que :

$$2^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}.$$

Ic) Calculer A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

II) On note I_3 la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$, et on définit la matrice :

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

IIa) Calculer C^2, puis montrer que $C^2 = 3C - 2I_3$.

IIb) On définit par récurrence les suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $C^n = x_n I_3 + y_n C$.

IIc) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer C^n en fonction de n (on ne demande pas de simplifier tous les calculs).

Exercice 1 ($\sim$ 6 points) :
Soit P dans $\mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$.
A) On suppose que P a une racine multiple (c'est-à-dire d'ordre de multiplicité au moins 2) dans $\mathbb{C}$.
A1) Montrer qu'il existe α dans $\mathbb{C}$, et des polynômes R et U de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P = (X-\alpha)R$ et $P' = (X-\alpha)U$.
A2) Montrer qu'il existe V dans $\mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(V) = n-1$ et $PU + P'V = 0$.

B) On suppose que toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont simples. Soient U et V dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $\deg(V) = n-1$.
B1) Montrer qu'il existe une racine de P qui n'est pas racine de V.
B2) Montrer que $PU + P'V \neq 0$.

Exercice 2 ($\sim$ 3 points) : Soient n un entier strictement positif. On définit le polynôme :

$$P = \sum_{k=0}^{n} X^k = 1 + X + ... + X^n.$$

2.1) Calculer le produit $(1-X)P$.
2.2) Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

UNIVERSITE PARIS-DAUPHINE MD1. 21 Janvier 2003

Examen Final d'Algèbre 1

Durée 2h : tous documents et calculatrices interdits.

Les trois exercices sont indépendants. Le barème indiqué, sur 21 points, est approximatif.

Exercice 1 ($\sim$ 8,5 points) :
Soient a et b des complexes fixés. On note :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer P^2. En déduire que P est inversible et calculer P^{-1}.
Dans la suite de l'exercice on note $B = P^{-1}AP$.
b) Calculer la matrice B.
c) Calculer B^n pour tout n de $\mathbb{N}$.
d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$.
e) Calculer A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 2 ($\sim$ 8,5 points) :
Soit P un polynôme de degré 6 à coefficients réels tel que :

$$(X+1)^4 | P-2 \text{ et } (X-1)^3 | P+2.$$

On note $H = P + 2$.
a) Montrer qu'il existe un unique polynôme Q de degré 2 dans $\mathbb{R}[X]$ tq :

$$H = (X+1)^4 Q + 4. \qquad (*)$$

b) Montrer que $H(1) = H'(1) = H''(1) = 0$, et que $Q(1) = -1/4$.
c) Dériver l'équation $(*)$ et montrer que $Q'(1) = 1/2$.
d) Montrer que $Q''(1) = -5/4$.
e) Déterminer Q, puis déterminer P (on ne demande pas de développer tous les calculs).

Exercice 3 ($\sim$ 4 points) : Soient n un entier strictement positif, et $A = (a_{i,j})_{n,n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.
1) Calculer les coefficients diagonaux de la matrice $A\,A^T$ en fonction des coefficients de A.
2) Montrer que :

$$A\,A^T = 0_{M_n(\mathbb{R})} \Longleftrightarrow A = 0_{M_n(\mathbb{R})}.$$

UNIVERSITE PARIS-DAUPHINE. UFR MD MD1. 23 Janvier 2002

Examen d'Algèbre 1

Durée 2h : tous documents et calculatrices interdits.

Les trois exercices sont indépendants. Le barême indiqué est approximatif.

Exercice 1 ($\sim$ 5 points) :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ telle que $ad - bc = 0$.

On note $s = a + d$. Soit B la matrice de $M_2(\mathbb{R})$ telle que $A + B = sI_2$.

1) Calculer le produit matriciel AB.

2) En déduire que $A^2 = sA$, et calculer pour tout n de $\mathbb{N}^*$ la matrice A^n.

3) Calculer B^n pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Exercice 2 ($\sim$ 8 points) :

Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ tel que P' divise P.

On note n le degré de P.

1) Montrer qu'il existe des complexes uniques a et b tels que :

$$P = (aX + b)P' \qquad (*)$$

2) Montrer que $a = 1/n$.

(on pourra identifier les coefficients de plus haut degré dans la relation (*)).

3) On note $\alpha = -nb$.

3a). Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, $(n - k)P^{(k)} = (X - \alpha)P^{(k+1)}$.

3b). Montrer que pour tout k de $\{0, ..., n - 1\}$, $P^{(k)}(\alpha) = 0$.

3c) Montrer qu'il existe λ non nul dans $\mathbb{C}$ tel que : $P = \lambda(X - \alpha)^n$.

Exercice 3 ($\sim$ 7 points) :

Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ non nulle (c'est-à-dire différente de la matrice nulle) et symétrique.

1) Montrer que A^2 est symétrique.

2) Exprimer les coefficients de A^2 en fonction de ceux de A.

3) Montrer que la trace de A^2 est strictement positive, puis en déduire que A^2 est non nulle.

4) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, A^k est non nulle.

Exercice 3 ($\sim$ 6 points) : On note $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.
1. Question de cours : Enoncer les deux théorèmes de Bezout.

Dans toute la suite de l'exercice, a et b sont deux entiers naturels fixés tels que $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

2. Soit $x \in \mathbf{Z}$ tel que $ab \mid x$. Prouver que $a \mid x$ et $b \mid x$.

3. Montrer qu'il existe u et v dans $\mathbf{Z}$ tels que :

$$\forall q \in \mathbf{Z}, \qquad q = auq + bvq$$

4. Soient q et q' dans $\mathbf{Z}$ tels que $aq = bq'$.
Montrer que $q = buq' + bvq$. En déduire que $ab \mid aq$.

5. Déduire des questions précédentes que pour tout x de $\mathbf{Z}$,

$$(a \mid x \text{ et } b \mid x) \iff (ab \mid x)$$