Exercices sur la logique et énigmes

Exercice 1. Jean est blond et Julie est brune. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, puis les nier.

1. Jean est brun ou Jean est blond.
2. Jean est roux et Julie est brune.
3. Jean n'est pas blond ou Julie est brune.
4. Il n'est pas vrai que Jean n'est pas blond.

Exercice 2. Soit x un réel. Nier les propositions suivantes :

1. $x = 1$ ou $x = -1$
2. $0 \leq x \leq 1$ (ce qui veut dire par définition : $0 \leq x$ et $x \leq 1$)
3. $x = 0$ ou ($x^2 = 1$ et $x \geq 0$)

Exercice 3. Nier la proposition suivante : “Tous les habitants de la lune sont des harengs". Dire si elle est vraie ou fausse (en admettant qu'il n'y ait pas d'habitants sur la lune).

Exercice 4. Nier, en français courant, les propositions suivantes :

1. Il y a au moins un étudiant qui aime le tennis.
2. Tous les étudiants aiment lire.
3. Dans toutes les matières, il y a au moins un étudiant qui travaille régulièrement.
4. Il y a un étudiant qui travaille régulièrement dans toutes les matières.

Exercice 5. Soient A, B, C, D des propositions. Montrer que :

(A ou B) et (C ou D) est équivalent à (A et C) ou (A et D) ou (B et C) ou (B et D)

Application : trouver les couples de réels (x, y) tels que :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

Exercice 6. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, et les nier.

1. Pour tout réel x, si $x \geq 3$ alors $x^2 \geq 5$
2. Pour tout entier naturel n, si $n > 1$ alors $n \geq 2$
3. Pour tout réel x, $x^2 \geq 1$ est équivalent à $x \geq 1$

Exercice 7. Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Pour tout entier naturel n, il existe un réel x tel que $x > 2n$
2. Il existe un réel x tel que, pour tout entier naturel n, $x > 2n$
3. Pour tout réel x, pour tout réel y, si $x^2 = y^2$ alors $x = y$.
4. Pour tout réel positif x, pour tout réel positif y, si $x^2 = y^2$ alors $x = y$.
5. Pour tout entier naturel n, pour tout entier naturel m, $n + m > 0$

Exercice 8. Donner la réciproque et la contraposée des implications suivantes.

1. Si le père Noël existe alors Noël est en juillet
2. Soit x un réel. Si $x \geq 3$, alors $x + 2 \geq 5$.
3. Soit n un entier naturel. Si $n \geq 1$ alors $n^2 > n$.

Exercice 9. Soit F l'ensemble des femmes. On note $P(x,y)$ l'expression "x est la fille de y", où x et y sont des femmes. Ecrire les formules suivantes dans le langage des ensembles puis en écriture formalisée, puis les nier.

1. Toute femme a au moins une fille.
2. Il y a au moins une femme qui a au moins une fille.
3. Toute femme a une mère et une seule.
4. Il y a au moins une femme qui n'a aucune fille.

Par exemple, la première proposition s'écrit "pour tout y dans F, il existe x dans F tel que x est la fille de y" dans le langage des ensembles, et $\forall y \in F, \exists x \in F, P(x,y)$ en écriture formalisée. Sa négation en français courant est "il y a une femme qui n'a aucune fille". Sa négation dans le langage des ensembles est : "Il existe y dans F tel que pour tout x dans F, x n'est pas la fille de y". Enfin, sa négation en écriture formalisée est : $\exists y \in F, \forall x \in F, nonP(x,y)$

Exercice 10. A l'université Deuxphine, il n'y a que deux étudiants : Jean et Julie, et trois matières : algèbre, analyse et économie. Les résultats des étudiants sont les suivants.

	Algèbre	Analyse	Economie
Jean	12	5	16
Julie	14	15	7

Soit $E = \{$Jean, Julie$\}$ l'ensemble des étudiants. Soit $F = \{$algèbre, analyse, économie$\}$ l'ensemble des matières. Pour tout x dans E et tout y dans F, on désigne par $P(x,y)$ l'expression : "l'étudiant x a la moyenne (10 ou plus) dans la matière y".

Exprimer dans le langage des ensemble, puis en français courant les propositions suivantes. Dire, en justifiant, si elles sont vraies ou fausses.

1. $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x,y)$
2. $\exists x \in E, \exists y \in F, P(x,y)$
3. $\exists y \in F, \forall x \in E, \text{non}P(x,y)$
4. $\exists x \in E, \forall y \in F, P(x,y)$
5. $\forall y \in F, \exists x \in E, P(x,y)$
6. $\exists y \in F, \forall x \in E, P(x,y)$

Par exemple, la première proposition se dit "Pour tout élément x de E, pour tout élément y de F, x a la moyenne dans la matière y" dans le langage des ensembles et "Tous les étudiants ont la moyenne dans toutes les matières" en français courant. C'est faux, puisque Jean n'a pas la moyenne en analyse.

Exercice 11. Soit a un réel. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

P : Si (pour tout réel strictement positif ϵ, on a $|a| < \epsilon$) alors $a = 0$

Q : (Il existe un réel strictement positif ϵ tel que $|a| \geq \epsilon$) ou $a = 0$

R : Si $a \neq 0$ alors (il existe un réel strictement positif ϵ tel que $|a| \geq \epsilon$)

Montrer que R est vraie. En déduire que P et Q sont vraies.

Exercice 12. Donner, en français courant, un exemple de ou inclusif et un exemple de ou exclusif. En mathématiques, le ou est-il inclusif ou exclusif ?

Exercice 13. *(Un problème courant dans la rédaction des récurrences, et qui à coûté beaucoup de points à vos camarades l'an dernier)* Supposons qu'on veuille démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $\sum_{k=0}^{n} k = n(n+1)/2$. Corrigez la rédaction suivante :

Soit P(n) la propriété : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k = n(n+1)/2$. P(0) est vraie car.... Supposons P(n) vraie. Alors..., donc P($n+1$) est vraie. Donc, par récurrence, $\sum_{k=0}^{n} k = n(n+1)/2$ pour tout entier naturel n.

Exercice 14. Une récurrence erronée. On considère des boîtes de crayons de couleurs. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $P(n)$ la proposition : "Dans une boîte quelconque de n crayons de couleurs, tous les crayons sont de la même couleur". Le raisonnement suivant prouve-t-il que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$? Sinon, où est l'erreur ?

Dans une boîte d'un seul crayon, les crayons ont bien sûr tous la même couleur. Donc $P(1)$ est vraie.
Soit maintenant n dans $\mathbb{N}^*$. Prenons une boîte de n crayons. Si l'on enlève provisoirement un crayon, il reste n crayons qui, d'après $P(n)$, sont tous de la même couleur. Remettons le crayons mis à l'écart et enlevons un autre crayon. Toujours d'après $P(n)$, les n crayons restants sont tous de la même couleur. Mais comme les crayons qui ne sont pas sorti de la boîte ont une couleur constante, il s'ensuit que les $n+1$ crayons ont même couleur. Donc $P(n+1)$ est vraie. Donc, par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Question subsidiaire : pour quelles valeurs de n l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est-elle vraie ?

Voyage sur l'île de Puro-Pira.

Le type d'énigme qui suit a été popularisé par le logicien Raymond Smullyan, dont je vous conseille vivement les livres. Vous vous trouvez sur une île un peu étrange : l'île de Puro-Pira. Vous savez qu'à part vous, on y trouve deux catégorie de gens : les Purs, qui ne disent que des choses vraies, et les Pires, qui ne disent que des choses fausses. Votre but est de déterminer le type des habitants que vous rencontrez. Cela ne sera pas forcément toujours possible.
On rappelle que "Si P alors Q" veut dire "(non P) ou Q". Donc si un Pur dit "Si P alors Q", c'est que P est fausse ou Q est vraie. Si un Pire dit "Si P alors Q", c'est que P est vraie et Q est fausse. D'autre part, dans ce qui suit et comme toujours en mathématiques, le "ou" est inclusif.

Alice et Bernard sont deux habitants de l'île de Puro-Pira. Il se peut que ce soient deux purs, deux pires, une pure et un pire, une pire et un pur : tout est possible.

Question 1. Bernard vous dit : "Nous sommes tous les deux des Pires". Qui est qui ? Pour vous aider à démarrer, la réponse est dans la note de bas de page.[1]

Question 2. Alice vous dit : "Je suis une Pure et Bernard est un Pire". Que peut-on en déduire ? Réponse en note de bas de page.[2]

Question 3. Alice vous dit : "Si je suis une Pure alors Bernard est un Pire". Qui est qui ? Réponse dans la note.[3]

Question 4.
Alice : "Je suis une Pure ou Bernard est un Pur."
Bernard : "Nous ne sommes pas du même type."
Qui est qui ? Réponse dans la note.[4]

A vous de résoudre les énigmes suivantes.

---

[1] Un Pur ne pourrait pas dire ça. Donc Bernard est un Pire. Donc ce qu'il dit est faux. Donc Alice et Bernard ne sont pas tous les deux des Pires. Or Bernard est un Pire. Donc Alice est une Pure.

[2] La seule chose que l'on puisse en déduire, c'est qu'Alice et Bernard ne sont pas tous les deux des Purs.

[3] Alice est une Pure et Bernard est un Pire. Supposons qu'Alice soit une Pire. Alors ce qu'elle dit est vraie (rappelez-vous que si P est fausse alors nonP est vraie, donc nonP ou Q est vraie, donc par définition "si P alors Q" est vraie). Donc Alice est une Pure. Contradiction. Notre supposition initiale était donc fausse. Donc Alice est une Pure. Donc ce qu'elle dit est vraie. Donc Bernard est un Pire.

[4] Alice et Bernard sont tous les deux des Pires. En effet, supposons qu'Alice soit une Pure. Alors il y a deux cas : 1er cas, Alice et Bernard sont tous les deux des Purs. Alors Bernard dit la vérité, donc il ne peut pas dire "Nous ne sommes pas du même type". Contradiction. 2ème cas, Alice est une Pure et Bernard est un Pire. Alors Bernard ment toujours. Donc il ne peut pas dire "Nous ne sommes pas du même type", puisque c'est vrai. Contradiction. Donc supposer qu'Alice est une Pure mène à une contradiction. Donc Alice est une Pire. Donc ce qu'elle a dit est faux. Donc Alice et Bernard sont tous les deux des Pires.

Question 5 :

a) trouver une phrase que ni un Pur ni un Pire ne peut dire ;
b) trouver une phrase qui peut-être dite par un Pur mais aussi par un Pire.

Question 6.

Alice : "Je ne suis ni une Pure ni une Pire."
Bernard "C'est vrai !"
Qui est qui ?

Question 7. Chloé est une habitante de l'île de Puro-Pira.

Vous : "Est-ce que Bernard et Chloé sont tous les deux des Purs ?"
Alice : "Oui."
Vous : "Est-ce que Bernard est un Pur ?"
Alice : "Non."
Qui est qui ?

Question 8. Entre Alice, Bernard et Chloé, l'un des trois est le chef du village.

Alice : "C'est moi le chef."
Bernard : "C'est moi le chef."
Chloé : "Au plus l'un de nous trois dit la vérité."
Qui est le chef ?

Question 9 (plus difficile). Sur l'île des Purs et les Pires, on a volé un cheval, il y a 4 suspects : Alice, Bernard, Chloé et David. Les 3 premiers sont présents au tribunal, le 4ème, David, n'a pas encore été pris. Le juge, qui est un Pur et raisonne parfaitement, pose la question : "Qui a volé le cheval ?". Voici les réponses :

Alice : "C'est Bernard qui a volé le cheval."
Bernard : "C'est Chloé qui a volé le cheval."
Chloé : "C'est David qui a volé le cheval."
Alors, l'un des 3 accusés dit : "Les 2 autres mentent !". Le juge réfléchit et après quelques instants, il désigne l'un des 3 et lui dit : "Vous ne pouvez pas avoir volé le cheval, vous êtes libre." Qui est-ce ?

L'audience se poursuit après le départ de l'innocent. Le juge demande à l'un des 2 si l'autre est un Pur et après qu'on lui a répondu par OUI ou par NON, il sait qui a volé le cheval. Qui est-ce ?

Des Espions sur l'île de Puro-Pira.

L'île de Puro-Pira a été infiltrée par des Espions. Ceux-ci disent peuvent dire la vérité, mentir, dire des choses paradoxales : tout est possible. Vous savez que parmi Alice, Bernard et Chloé, il y a exactement un Pur, un Pire, et un Espion. Vous devez devinez qui est qui.

Question 10.

Alice : "Je suis une Pure."
Bernard : "Je suis un Pire."
Chloé : "Bernard n'est pas un Pur."

Question 11.

Alice : "Je suis une Pure."
Bernard : "Je suis un Pire."
Chloé : "Alice est une Espionne."

Question 12.

Alice : "Je suis une Pure."
Bernard : "Alice est une Pure."
Chloé : "Si vous me posiez la question, je vous dirais qu'Alice est une Espionne."