Contrôle continu d'algèbre

Durée 1h. Tous documents et calculatrices interdits.

Les exercices sont indépendants. Le barème indiqué est approximatif. Sauf mention contraire, les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 (environ 2,5 pts).

Soit R une relation binaire sur un ensemble E . Donner la définition de : “ R est une relation d'équivalence” (on définira les propriétés nommées).

Exercice 2 (environ 3,5 pts).

Donner la négation des propositions suivantes. Dire si elles sont vraies ou fausses, et le justifier.

2a) P : pour tout réel x , il existe un réel y tel que $yx > x^2$ 2b) Q : pour tout réel x et pour tout réel y , si $x > y$ alors $x^2 > y^2$ **Exercice 3** (environ 4,5 pts).

Soit E un ensemble. Soient A et B des sous-ensembles de E .

3a) Montrer que si $A \cap B = \emptyset$ alors $B \subset C_E(A)$.3b) Montrer que si $C_E(A) \cap C_E(B) = \emptyset$ alors $C_E(A) \subset B$.

3c) Montrer que

$$(A \cap B = \emptyset \text{ et } C_E(A) \cap C_E(B) = \emptyset) \Leftrightarrow B = C_E(A)$$

3d) Soit $A = [0, 1]$. Donner (sans justifier) un sous-ensemble B de $\mathbb{R}$ tel que $A \cap B = \emptyset$ et $C_{\mathbb{R}}(A) \cap C_{\mathbb{R}}(B) = \emptyset$.**Exercice 4** (environ 10,5 pts).

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par : $f(0) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = n - 1$.

4a) Donner sans justifier $f(\{0, 1, 2\})$.4b) soit $A = \{2p, p \in \mathbb{N}\} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$. Déterminer $f(A)$ et $f^{-1}(A)$.4c) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?4d) Montrer qu'il existe une application $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$.4e) Est-il possible de trouver une application $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$?