

Quelques notions de logique

Mode d'emploi : vous ne comprendrez pas tout à la première lecture. Quand quelque chose vous bloque, passez, et revenez-y ensuite. Les résultats les plus importants figurent en gras. Les recopier vous aidera à les retenir. Relisez ce document régulièrement, jusqu'à ce que tout soit devenu clair. Sur le même sujet, vous pouvez également lire le 1er chapitre du livre de François Liret et Dominique Martinais : Algèbre, 1ère année, chez Dunod.

1 Les lettres grecques et les symboles mathématiques

α alpha	κ kappa	τ tau	Λ Lambda	$\forall$ Pour tout
β beta	λ lambda	υ upsilon	Ξ Xi	$\exists$ Il existe
γ gamma	μ mu	ϕ phi	Π Pi	$\Rightarrow$ implique
δ delta	ν nu	χ chi	Σ Sigma	$\Leftrightarrow$ équivalent
ϵ epsilon	ξ xi	ψ psi	Υ Upsilon	$\cap$ intersection
ζ zeta	$\omicron$ omicron	ω omega	Φ Phi	$\cup$ réunion
η eta	π pi	Γ Gamma	Ψ Psi	$\emptyset$ ens. vide
θ theta	ρ rho	Δ Delta	Ω Omega	$\in$ appartient
ι iota	σ sigma	Θ Theta		$\subset$ est inclus

2 Les propositions

2.1 Un peu de vocabulaire

Dans ce cours, vous rencontrerez de nombreux énoncés mathématiques comme :

- 1) Soit n un entier naturel.
- 2) Il existe un réel x tel que $x^2 = 2$
- 3) $6 < \frac{25}{4}$
- 4) Pour tout entier naturel n , on a $n^2 \geq n$
- 5) Pour tout réel x , on a $x^2 \geq x$
- 6) Si x est un réel, on appelle valeur absolue de x le plus grand des nombres x et $-x$.
- 7) Si n est un entier naturel pair, alors n^2 est pair.

Ces énoncés sont de types différents : l'énoncé 1) introduit une notation. L'énoncé 6) est une définition. Les énoncés 2), 3), 4), 5) et 7) affirment qu'une certaine propriété est vraie. Ce sont des *propositions*.

¹Cours de Y. Viossat. Ce document s'inspire d'un polycopié écrit par Geneviève Pons.

Définition : une proposition est un énoncé mathématique qui affirme une propriété.

Une proposition est soit vraie soit fausse. Elle ne peut pas être à la fois vraie et fausse. Parmi les propositions ci-dessus, les propositions 2), 3), 4) et 7) sont vraies. La proposition 5) est fausse (en effet, $1/2$ est un réel et on n'a pas $(1/2)^2 \geq 1/2$).

On distingue deux types de propositions vraies : les **axiomes** et les **théorèmes**. Un axiome est une proposition dont on décide *a priori* qu'elle est vraie : elle ne se démontre donc pas. Un **théorème** est une proposition dont on démontre qu'elle est vraie.²

Exemples :

P : " $9 \geq 8$ " est une proposition vraie.

Q : "Pour tout nombre réel x tel que $x^2 \geq 1$, on a $x \geq 1$ " est une proposition fausse.

A : "Par deux points donnés on peut faire passer une droite et une seule" est un axiome de la géométrie euclidienne.

T : "Toute fonction dérivable est continue." est un théorème qui sera démontré dans le cours d'analyse.

Dans la suite, les lettres majuscules P, Q, R désigneront des propositions.

Un des buts des mathématiques est bien sûr de prouver des théorèmes intéressants. Cela suppose notamment de savoir former de nouvelles propositions et de savoir déterminer si ces nouvelles propositions sont vraies ou fausses. Pour cela on dispose :

- des propositions déjà formées (au début, uniquement les axiomes) ;
- d'expressions comme "non", "et", "ou", "implique", "est équivalent à" (qu'on appelle des connecteurs) ;
- de règles de construction des propositions qui nous disent comment former de nouvelles propositions à l'aide de ces expressions ;
- de règles de logique, qui nous permettent de déterminer si ces nouvelles propositions sont vraies ou fausses.

Préciser ces règles, c'est définir le sens des connecteurs et étudier leurs propriétés. C'est ce que nous allons faire dans ce chapitre.

²Dans la pratique, d'autres mots sont également utilisés : le nom de théorème est souvent réservé aux résultats les plus importants. Un *lemme* est un résultat intermédiaire, utilisé dans la démonstration d'un théorème. Un *corollaire* est un résultat qui découle immédiatement d'un théorème. Enfin, comme dans la suite du cours on n'écrit que des propositions vraies, on emploiera le mot proposition avec le même sens que le mot théorème, mais pour des résultats un peu moins importants.

2.2 Négation d'une proposition

Définition : La négation de la proposition P , noté **non** P , est la proposition qui affirme que P est fausse. Elle est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

Par exemple, la négation de P : "La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ " est la proposition $\text{non}P$: "la fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ ". La négation de " $3^8 = 6561$ " est " $3^8 \neq 6561$ ".

Remarque : la proposition $\text{non}(\text{non}P)$ et la proposition P ont toujours la même "valeur de vérité" (elles sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses). On dit qu'une double négation est équivalente à l'absence de négation.

2.3 Sens du ET et du OU en mathématiques.

Remarque : Pour distinguer le ET mathématique du "et" du langage courant, on écrira le premier en majuscule. Même chose pour le OU.

Considérons la proposition suivante : " $x > 0$ ET $x < 1$ ". Elle est du type " P ET Q ", où P est la proposition " $x > 0$ " et Q la proposition " $x < 1$ ". Elle affirme que les propositions P et Q sont toutes les deux vraies.

La proposition " $x > 0$ OU $x < 1$ " est du type " P OU Q ", avec pour P et Q les mêmes propositions que précédemment. Elle affirme qu'au moins l'une des propositions P et Q est vraie.

D'une manière générale, **la proposition P ET Q est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies, et est fausse sinon. La proposition P OU Q est vraie si au moins l'une des deux propositions P et Q est vraie, et est fausse sinon.**

Bien noter que si P et Q sont toutes les deux vraies, alors P OU Q est vraie. On dit que le "OU" est inclusif.³

Exemples :

La proposition " $3 > 2$ ET $5 > 7$ " est fausse. La proposition " $3 > 2$ OU $5 > 7$ " est vraie.

La proposition " $3 > 2$ ET 4 est un nombre pair" est vraie. La proposition " $3 > 2$ OU 4 est un nombre pair" est également vraie.

La proposition " $5 > 10$ ET $2 > 3$ " est fausse. La proposition " $5 > 10$ OU $2 > 3$ " est également fausse.

Remarques :

³En français, le mot "ou" est souvent ambigu. Ainsi, quand on dit "Pour bénéficier d'une réduction, il faut être étudiant ou avoir moins de 26 ans.", cela ne veut pas dire que si vous êtes étudiant et avez moins de 26 ans, vous ne pourrez pas bénéficier de la réduction : le ou est alors inclusif. En revanche, l'expression "fromage ou dessert" veut dire : soit fromage, soit dessert, mais pas les deux. Le ou est alors exclusif. En mathématiques, le ou est toujours inclusif.

1) On peut résumer les définitions des termes "non", "ET" et "OU" par la table suivante, appelé table de vérité du non, du ET et du OU. On a également fait figurer la définition de la proposition "nonP OU Q" pour des raisons qui deviendront claires dans la section suivante.

P	Q	non P	P ET Q	P OU Q	nonP OU Q
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

Cette table se lit ainsi : si P est vraie et Q est vraie, alors : nonP est fausse, P ET Q est vraie, P OU Q est vraie, et nonP OU Q est vraie; si P est vraie et Q est fausse, alors : nonP est fausse, P ET Q est fausse, P OU Q est vraie, etc.

2) Pour toute proposition P, l'une des deux propositions P et nonP est vraie, et l'autre est fausse. Il s'ensuit que la proposition P ET nonP est toujours fausse, et la proposition P OU nonP toujours vraie. Ces principes fondamentaux s'appellent respectivement principe de non contradiction et principe du tiers-exclu.

3) La proposition "Q OU P" veut dire la même chose que la proposition "P OU Q", à savoir qu'au moins l'une des propositions P et Q est vraie. De même, la proposition "Q ET P" veut dire la même chose que la proposition "P ET Q". **On dit que le OU et le ET sont *commutatifs*.**

4) On peut combiner des ET, des OU et des NON pour former de nouvelles propositions. Par exemple, P ET (nonP OU Q). Il faut alors bien faire attention à la place des parenthèses, car le sens en dépend. Considérons par exemple les propositions suivantes :

P : j'habite la planète Mars

Q : je suis étudiant(e)

Je vous laisse vérifier que, pour chacun d'entre vous, la proposition (P ET nonP) OU Q est alors vraie, alors que la proposition P ET (nonP OU Q) est fausse (enfin, en supposant qu'aucun d'entre vous n'habite Mars; dans le cas contraire, j'appuierai votre demande d'allocation transport).⁴

La place des parenthèses est donc fondamentale. Sans parenthèses, P ET nonP OU Q ne veut rien dire. En effet, cela pourrait vouloir dire (P ET nonP) OU Q mais aussi P ET (nonP ou Q), et ce n'est pas la même chose.

4) Dans certains cas très particuliers, la place des parenthèses n'est pas importante. Ainsi, P ET (Q ET R) veut dire la même chose que (P ET Q) ET R, à savoir que les trois propositions P,Q,R sont vraies. On peut donc écrire simplement P ET Q ET R, sans parenthèses, sans que

⁴Pour un exemple plus mathématique, vous pouvez prendre pour P : " $2 + 2 = 5$ " et pour Q : " $3^2 = 9$ ". En fait, il suffit de prendre pour P n'importe quelle proposition fausse et pour Q n'importe quelle proposition vraie.

ce soit ambigu. De même, $P \text{ OU } (Q \text{ OU } R)$ veut dire la même chose que $(P \text{ OU } Q) \text{ OU } R$: au moins l'une des propositions P , Q , R est vraie. On peut donc écrire simplement $P \text{ OU } Q \text{ OU } R$. On dit que le ET et le OU sont *associatifs*.

2.4 Implication

Les mathématiciens aiment bien définir les notions qu'ils utilisent à partir du plus petit nombre de définitions de base possibles. Aussi ont-ils cherché à définir la notion d'implication à partir des expressions "non" et "OU". Pour voir comment cela est possible, analysons tout d'abord le sens de l'expression "Si...alors...". Imaginons qu'on connaisse deux individus, Anne et Luc, et qu'on sache qu'Anne est plus âgée que Luc. Rappelons qu'on dit que quelqu'un est mineur s'il a moins de 18 ans, et majeur sinon. On pourrait dire :

(1) "Si Anne est mineure, alors Luc est mineur".

Puisque Anne est plus âgée que Luc, la proposition ci-dessus est vraie. Remarquez que cette proposition ne nous dit pas si Anne est mineure ou non. Elle dit simplement qu'on est dans l'un des trois cas suivants : (Anne est mineure, Luc est mineur) ; (Anne est majeure, Luc est mineur) ; ou (Anne est majeure, Luc est majeur). En d'autres termes, la proposition (1) nous dit que la proposition "Anne est mineure et Luc n'est pas mineur" est fausse.

Pour une version mathématique du même exemple, supposons qu'on dispose de deux réels x et y tels que $x \geq y$. La proposition suivante est alors vraie :

"Si $x < 18$ alors $y < 18$ "

Cette proposition est du type "Si P alors Q ", où P est la proposition " $x < 18$ " et Q la proposition " $y < 18$ ". Elle veut dire qu'on est dans l'un des trois cas suivants : (P vraie, Q vraie) , (P fausse, Q vraie), ou (P fausse, Q fausse). Ce qu'on peut exprimer par : la proposition $P \text{ ET non} Q$ est fausse.

Considérons maintenant la proposition $\text{non} P \text{ ou } Q$. D'après la table de la section précédente, cette proposition est vraie dans les trois cas suivant : (P vraie, Q vraie) ; (P fausse, Q vraie) ; (P fausse, Q fausse), et elle est fausse dans le dernier cas possible : (P vraie, Q fausse). Bien que ce ne soit pas évident a priori, on constate donc que la proposition $\text{non} P \text{ ou } Q$ veut dire la même chose que "Si P alors Q ". Ceci a amené les mathématiciens à définir la proposition "Si P alors Q " comme *étant* la proposition $\text{non} P \text{ ou } Q$:

Définition : la proposition "Si P alors Q " est la proposition **non** P **ou** Q . Elle se note $P \Rightarrow Q$.

Vocabulaire : dans la proposition "Si P alors Q ", P s'appelle l'hypothèse et Q la conclusion. Au lieu de "Si P alors Q " on peut dire aussi " P implique Q ". Cela veut dire la même chose. Enfin, la proposition "Si Q alors P " s'appelle *l'implication réciproque* de "Si P alors Q ".

Une manière de retenir la définition de l'implication est la suivante : en mathématiques, quand on dit qu'une hypothèse implique une conclusion, on veut dire que l'hypothèse est fausse ou que la conclusion est vraie (éventuellement les deux).

2.5 Propositions équivalentes

Définition : On dit que la proposition P est équivalente à la proposition Q , et on note $P \Leftrightarrow Q$, si P implique Q et Q implique P .

Vocabulaire : pour dire que P est équivalente à Q , on dit aussi que P est vraie si et seulement si Q est vraie. On dit également que P est une condition nécessaire et suffisante de Q .

La table ci-dessous montre que la **proposition P est équivalente à la proposition Q si et seulement si elles ont la même “valeur de vérité”, c’est à dire si elles sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses.**

Table de “ $\Leftrightarrow$ ” :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

2.5.1 Quelques propriétés de l’équivalence :

En utilisant que deux propositions sont équivalentes si et seulement si elles sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses, on montre facilement que pour n’importe quelles propositions P , Q , R :

1. P est équivalente à P (on dit que l’équivalence est réflexive)
2. Si P est équivalente à Q alors Q est équivalente à P (on dit que l’équivalence est symétrique)
3. **Si P est équivalente à Q et que Q est équivalente à R alors P est équivalente à R** (on dit que l’équivalence est transitive).
4. **“ P est équivalente à Q ” si et seulement si “non P est équivalente à non Q ”.**
(En langage courant : “ P est équivalente à Q ” veut dire la même chose que “non P est équivalente à non Q ”.)

Soient P , Q , R trois propositions. Supposons que P et Q soient équivalentes. Alors la proposition complexe P ET R est équivalente à Q ET R . En effet, si P ET R est vraie alors P est vraie et R est vraie. Mais puisque P est vraie et que P et Q sont équivalentes, Q est vraie. Donc Q est vraie et R est vraie, donc Q ET R est vraie. On montre de même que si Q ET R est vraie, alors P ET R est vraie. On a donc bien montré que P ET R et Q ET R sont équivalentes. De même, vous pouvez vérifier en exercice que si P et Q sont équivalentes, alors P OU R est équivalente à Q OU R .

Plus généralement, appelons proposition complexe une proposition construite à l’aide de propositions de base et des connecteurs “non”, “ET”, “OU”, “implique”, “est équivalente à”.

Par exemple $P \text{ OU } Q$ est une proposition complexe construite à l'aide des propositions de bases P et Q . On a alors la propriété suivante :

Règle d'échange : soient P et Q des propositions équivalentes. Soit S une proposition complexe construite à partir de P et d'autres propositions. En remplaçant P par Q dans S , on obtient une proposition complexe équivalente à S .

Preuve : la valeur de vérité de S dépend uniquement de la valeur de vérité des propositions de bases et de la manière dont s'enchaînent les connecteurs. En remplaçant P par une proposition qui a la même valeur de vérité, on obtient donc une proposition qui a la même valeur de vérité que S . Si c'est trop abstrait, admettez, et comprenez les exemples précédents.

Exemple de propositions équivalentes : soit x un nombre réel. Les propositions " $3^9 \geq 10^5$ " et " $3^9 + 1 \geq 10^5 + 1$ " sont équivalentes.

Exemple de transitivité de l'équivalence : soient x et y des réels. Soient P , Q et R les trois propositions suivantes :

$$P : x + 17 > y + 15$$

$$Q : x + 2 > y$$

$$R : (x + 2)^3 > y^3$$

P est équivalente à Q et Q est équivalente à R , donc P est équivalente à R .

2.6 Propriétés du ET et du OU

Les propriétés suivantes sont vraies pour n'importe quelles proposition P , Q , R . Elles se démontrent facilement et nous les admettrons pour la plupart.

2.6.1 Distributivité du ET sur le OU et du OU sur le ET

Théorème 1 :

1) $P \text{ ET } (Q \text{ OU } R)$ est équivalent à $(P \text{ ET } Q) \text{ OU } (P \text{ ET } R)$

2) $P \text{ OU } (Q \text{ ET } R)$ est équivalent à $(P \text{ OU } Q) \text{ ET } (P \text{ OU } R)$

On dit, respectivement, que le ET est *distributif* sur le OU, et que le OU est distributif sur le ET.

Exemple 1 : "Je vais acheter un sandwich ET (je vais acheter une pomme OU je vais acheter une poire)" veut dire la même chose que "(Je vais acheter un sandwich ET je vais acheter une

pomme) OU (je vais acheter un sandwich ET je vais acheter une poire)".

Exemple 2 :

A : "j'achète un vélo OU (j'achète une voiture ET j'achète une place de parking)"

est équivalent du point de vue logique à

B : "(j'achète un vélo OU j'achète une voiture) ET (j'achète un vélo OU j'achète une place de parking)"

En effet B est vraie si j'achète un vélo, B est encore vraie si je n'achète pas de vélo mais que j'achète une voiture et un parking, et B est fausse dans tous les autres cas (vérifiez-le!). Il en est de même de A. Les propositions A et B sont donc équivalentes.

Remarque : une manière de prouver, par exemple, que $P \text{ OU } (Q \text{ ET } R)$ est équivalent à $(P \text{ OU } Q) \text{ ET } (P \text{ OU } R)$, est de faire la table de vérité de $P \text{ OU } (Q \text{ ET } R)$ et de $(P \text{ OU } Q) \text{ ET } (P \text{ OU } R)$, et de constater que ces propositions sont soit toutes les deux vraies, soient toutes les deux fausses. C'est long, mais c'est facile. On obtient :

P	Q	R	Q ET R	P OU (Q ET R)	P OU Q	P OU R	(P OU Q) ET (P OU R)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

On constate bien que la proposition $P \text{ OU } (Q \text{ ET } R)$ est vraie si et seulement si la proposition $(P \text{ OU } Q) \text{ ET } (P \text{ OU } R)$ est vraie. Ces deux propositions sont donc bien équivalentes.

2.6.2 Négation du ET

Théorème 2 : La négation de $P \text{ ET } Q$ est $\text{non}P \text{ OU } \text{non}Q$ ⁵

⁵Plus précisément, la proposition $\text{non}(P \text{ ET } Q)$ est équivalente à la proposition $(\text{non } P) \text{ OU } (\text{non } Q)$. Pour le démontrer, on peut procéder ainsi : la proposition $\text{non}(P \text{ ET } Q)$ est fausse si P et Q sont toutes les deux vraies, et est vraie dans tous les autres cas. De même la proposition $\text{non}P \text{ OU } \text{non}Q$ est fausse si $\text{non}P$ et $\text{non}Q$ sont toutes les deux fausses, c'est à dire si P et Q sont toutes les deux vraies, et est vraie dans tous les autres cas. Les propositions " $\text{non}(P \text{ ET } Q)$ " et " $\text{non}P \text{ OU } \text{non}Q$ " sont donc bien équivalentes.

Intuitivement, cela signifie simplement que la négation de "ces deux propositions sont vraies" est "au moins une de ces deux propositions est fausse".

Exemples : La négation de "L'homme s'appelle Jean ET la femme s'appelle Sandrine" est "L'homme ne s'appelle pas Jean OU la femme ne s'appelle pas Sandrine".

Soit x un nombre réel. La négation de " $x \geq 0$ ET $x \leq 1$ " est " $x < 0$ OU $x > 1$ ".

2.6.3 Négation du OU

Théorème 3 : La négation de "P OU Q" est "nonP ET nonQ".⁶

Intuitivement, cela signifie simplement que la négation de "au moins l'une de ces deux propositions est vraie" est "ces deux propositions sont fausses".

Exemples : la négation de "(je suis né en automne) OU (je suis né au printemps)" est "(je ne suis pas né en automne) ET (je ne suis pas né au printemps)".⁷

La négation de "(6 est un multiple de 3) ET (12 est un multiple de 6)" est "(6 n'est pas un multiple de 3) OU (12 n'est pas un multiple de 6)".

Les théorèmes 2 et 3 se généralisent à un nombre quelconque de propositions. Ainsi, si P, Q, R, S sont des propositions, la négation de P OU Q OU R OU S est nonP ET nonQ ET nonR ET nonS. De même la négation de P ET Q ET R ET S est nonP OU nonQ OU nonR OU nonS. C'est intuitif : la négation de "au moins une de ces propositions est vraie" est "toutes ces propositions sont fausses". De même, la négation de "toutes ces propositions sont vraies" est "au moins une de ces propositions est fausse".

2.7 Propriétés de l'implication

Théorème 4 : Si "P implique Q" et "Q implique R", alors "P implique R" ⁸

Preuve : supposons que P implique Q et que Q implique R. Supposons P vraie. Puisque P est vraie et que P implique Q, la proposition Q est vraie. Puisque Q est vraie et que Q implique R, R est vraie. On a bien montré que si P est vraie, alors R est vraie, c'est à dire que P implique R.

Le résultat suivant est très important :

Théorème 5 : La proposition "Si P alors Q" est équivalente à la proposition "Si nonQ alors nonP".

⁶Toujours au sens où la proposition non(P OU Q) est équivalente à la proposition nonP ET nonQ

⁷En bon français, on dirait "je ne suis né ni en automne ni en été". En mathématiques, on ne dit pas "ni A ni B" mais "nonA et nonB".

⁸On dit que l'implication est *transitive*.

Preuve : Par définition la proposition "Si A alors B" est la proposition "nonA OU B". En appliquant cela à $A = \text{non}Q$ et $B = \text{non}P$, on voit que la proposition "Si nonQ alors nonP" est la proposition "non(nonQ) OU nonP". Cette proposition est équivalente à " Q OU nonP" et donc à "nonP OU Q " puisque le OU est commutatif. Or la proposition "nonP OU Q " est précisément la proposition "Si P alors Q". La proposition "Si nonQ alors nonP" est donc bien équivalente à la proposition "Si P alors Q".

Exemples : La proposition "Si Pierre a 20 ans, alors Marie à 19 ans" est équivalente à la proposition "Si Marie n'a pas 19 ans, alors Pierre n'a pas 20 ans".

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La proposition "si f est dérivable alors f est continue" est équivalente à la proposition "si f n'est pas continue, alors f n'est pas dérivable".

Le théorème 5 a une conséquence très importante : pour montrer que P implique Q, il suffit de montrer que nonQ implique nonP. En d'autres termes, **au lieu de montrer que si P est vraie alors Q est vraie, on peut montrer que si Q est fausse, alors P est fausse**. C'est la base de ce qu'on appellera le raisonnement "par contraposée".

Négation de l'implication

Théorème 6 : La négation de "P implique Q" est (P ET nonQ)

Cela découle du fait que "P implique Q" veut dire "nonP OU Q" et de la règle de négation du OU.

2.8 Compléments :

2.8.1 Comment montrer que P implique Q ? Comment montrer que P est équivalente à Q ?

D'après la table de $P \Rightarrow Q$, **pour montrer que P implique Q**, il suffit de montrer que si P est vraie alors Q est vraie. En pratique **on suppose que P est vraie** et au terme d'un raisonnement **on montre que Q est vraie**. Une autre méthode est de montrer que nonQ implique nonP (voir théorème 5). On suppose que Q est fausse et on montre que P est fausse.

Exemple : soient P et Q les propositions suivantes.

$$P : 3^9 > 20\,000$$

$$Q : 3^{10} > 50\,000$$

Montrons que P implique Q de manière directe. Supposons P vraie. Alors $3^9 > 20\,000$, donc $3 \times 3^9 > 3 \times 20\,000$, donc $3^{10} > 60\,000$. Or $60\,000 > 50\,000$ donc $3^{10} > 50\,000$. Donc Q est

vraie. On a donc bien montré que si P est vraie, alors Q est vraie. Donc P implique Q.

Montrons maintenant que P implique Q par contraposée. Supposons Q fausse. On a alors $3^{10} \leq 50\,000$, donc $3^{10} \leq 60\,000$; donc, en divisant les deux membres par 3 (qui est strictement positif), $3^9 \leq 20\,000$. Donc P est fausse. On a bien montré que si Q est fausse, alors P est fausse. Donc nonQ implique nonP. Donc P implique Q.

Pour montrer que la proposition P est équivalente à la proposition Q, on montre que P implique Q et que Q implique P.

Pour chaque sens, on a le choix entre une démonstration directe et une démonstration par contraposée. On peut donc montrer, au choix :

- $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$
- $P \Rightarrow Q$ et $\text{non}P \Rightarrow \text{non}Q$
- $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$ et $Q \Rightarrow P$
- $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$ et $\text{non}P \Rightarrow \text{non}Q$

ATTENTION A NE PAS DEMONTRER DEUX FOIS LE MEME SENS! Par exemple, si vous démontrez que P implique Q et que nonQ implique nonP, vous avez démontré deux fois la même chose.

2.8.2 Vocabulaire

Les expressions suivantes veulent dire la même chose :

- Si P est vraie, alors Q est vraie
- P implique Q
- P est une condition suffisante de Q
- Pour que Q soit vraie, il suffit que P soit vraie
- Q est une condition nécessaire de P
- Pour que Q soit fausse, il faut que P soit fausse
- Si Q est fausse, alors P est fausse
- P est vraie seulement si Q est vraie

Les expressions suivantes veulent dire la même chose :

- P est équivalente à Q
- Q est équivalente à P
- P et Q sont équivalentes
- P est vraie si et seulement si Q est vraie
- P est fausse si et seulement si Q est fausse
- P est une condition nécessaire et suffisante de Q

2.8.3 Sens formel et sens courant de l'implication

Du point de vue de la logique, dire que P implique Q veut simplement dire que la proposition $\text{non}P \text{ OU } Q$ est vraie. On peut donc s'amuser à se demander si P implique Q même si les propositions P et Q n'ont aucun rapport (du point de vue du sens). Par exemple, si P est la proposition : " $2 + 2 = 4$ ", et Q la proposition : "la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ ", il est formellement vrai que P implique Q . En effet, Q est vraie, donc $\text{non}P \text{ OU } Q$ est vraie, ce qui veut bien dire que P implique Q . On a même que P est équivalente à Q , puisque P et Q sont toutes les deux vraies, et que deux propositions sont équivalentes si et seulement si elles sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses.

En pratique, cependant, se demander si " $2+2 = 4$ implique "la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ " n'a qu'un intérêt limité, et on ne considérera jamais de telles implications bizarres. Quand on dira qu'une proposition P implique une proposition Q , on voudra dire en fait, non seulement que la proposition $\text{non}P$ ou Q est vraie, mais que, de plus, on peut déduire la proposition Q de la proposition P de façon relativement directe.

3 Les expressions “pour tout”, “il existe”

En mathématiques on considère souvent des énoncés comme “Il existe un réel x tel que $x^2 = 1$ ”, “Pour tout entier naturel n , on a $n^2 \geq n$ ”, “Pour tout réel x non nul, il existe un réel y tel que $xy = 1$ ”, etc.

Il est fondamental de comprendre ce que signifient ces énoncés, de savoir les manipuler, et de savoir les nier.

Dans la suite, E désigne un ensemble et $P(x)$ une expression qui dépend de x , et qui, pour tout élément x de E donné est soit vraie soit fausse. Par exemple, si $E = \mathbb{R}$, $P(x)$ pourrait être l'expression “ $x^2 \geq 2$ ”.

3.1 L'expression “il existe”

En mathématiques, quand on veut dire qu'il y a *au moins un* élément x de l'ensemble E qui vérifie la propriété $P(x)$, on écrit :

“Il existe un élément x de E tel que $P(x)$ ”

Exemples : “Il existe un réel x tel que $x^2 = 0$ ” est une proposition vraie (il y a exactement un réel x tel que $x^2 = 0$, donc il y en a au moins un.)

“Il existe un réel x tel que $x^2 = 1$ ” est une proposition vraie (il y a deux réels x tels que $x^2 = 1$, donc il y en a au moins un)

“Il existe un réel x tel que $x^2 \geq x$ ” est une proposition vraie (il y a une infinité de réels x tels que $x^2 \geq x$, donc il y en a au moins un)

En revanche, la proposition “Il existe un réel x tel que $x^2 = -1$ ” est une proposition fausse. En effet, il n'existe aucun réel x tel que $x^2 = -1$.

3.2 L'expression “pour tout”

Soit E un ensemble. En mathématiques, quand on veut dire que pour n'importe quel élément x dans E , la propriété $P(x)$ est vraie, on écrit :

“pour tout élément x de E , $P(x)$ ”

On peut aussi écrire, avec le même sens : “pour tout élément x de E , on a $P(x)$ ”.

Exemples : “Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ ” est une proposition vraie. En effet, il n'existe aucun nombre réel dont le carré soit strictement négatif.

La proposition “Pour tout réel x , $x^2 \geq x$ ” est une proposition fausse. Bien sûr il existe des réels qui sont plus petits que leur carré. Il en existe même une infinité. Mais il existe aussi des

réels qui sont strictement plus grands que leur carré, par exemple $1/2$. Donc la proposition est fausse.

La proposition "Pour tout réel x , $x^2 > 0$ " est fausse. En effet, pour $x = 0$, on n'a pas $x^2 > 0$.

Remarque : Les expressions "il existe un réel x ", "il existe x dans $\mathbb{R}$ " et "il existe un élément x de $\mathbb{R}$ " veulent dire la même chose. De même, les expressions "pour tout réel x ", "pour tout x dans $\mathbb{R}$ " et "pour tout élément x de $\mathbb{R}$ " veulent dire la même chose.

3.3 Variable muette

Considérons les expressions suivantes :

"il existe un réel x tel que $x^2 = 1$ "

"il existe un réel y tel que $y^2 = 1$ "

"il existe un réel z tel que $z^2 = 1$ "

"Il existe un réel *schtroumpf* tel que $(\text{schtroumpf})^2 = 1$ "

Ces expressions veulent toutes dire la même chose : qu'il existe un réel dont le carré vaut 1. De même les expressions

"pour tout réel x , on a $x^2 \neq -1$ "

"pour tout réel y , on a $y^2 \neq -1$ "

"pour tout réel z , on a $z^2 \neq -1$ "

veulent toutes dire la même chose (qu'il n'y a aucun réel dont le carré est -1).

Plus généralement, **si dans un énoncé comprenant une variable x , on remplace partout x par un autre symbole, on ne change pas le sens de l'énoncé.** Pour dire que le fait qu'on utilise x comme variable plutôt que y ne change pas le sens de la proposition, on dit que la variable est *muette*.

3.4 Un point de vocabulaire

Les expressions "Il existe" et "Pour tout" précisent la quantité d'éléments qu'on considère (au moins un élément ; tous les éléments). Pour cette raison on les appelle des **quantificateurs**.

3.5 Négation de propositions comprenant un quantificateur

Intuitivement, la négation de "Tous les éléments de l'ensemble E vérifient la propriété P " est "Il y a au moins un élément de E qui ne vérifie pas P ". Formellement :

La négation de “Pour tout élément x de E , on a $P(x)$ ” est “Il existe un élément x de E tel que $\text{non}P(x)$ ”

Exemple : La négation de “pour tout entier naturel n , on a $n^2 \geq n$ ” est “il existe un entier naturel n tel que $n^2 < n$ ”.

Intuitivement, la négation de “Il y a au moins un élément de E pour lequel la propriété P est vraie” est “Pour tous les éléments de E , la propriété P est fausse”. Formellement :

La négation de “Il existe un élément x de E tel que $P(x)$ ” est “Pour tout élément x de E , $\text{non}P(x)$ ”

Exemple : La négation de la proposition “Il existe un réel x tel que $x^2 = 0$ ” est “Pour tout réel x , $\text{non}(x^2 = 0)$ ” c’est à dire “Pour tout réel x , $x^2 \neq 0$ ”

La règle à retenir est la suivante :

Règle 7 : Pour nier une expression commençant par “il existe” on transforme le “il existe” en “pour tout” et on nie ce qui suit. Pour nier une expression commençant par “pour tout”, on transforme le “pour tout” en “il existe” et on nie ce qui suit.

3.6 Règles sur le OU et le ET

On admet les règles suivantes :

Théorème 8 : La proposition “Pour tout x dans E , on a $P(x)$ ET $Q(x)$ ” est équivalente à “(Pour tout x dans E , on a $P(x)$) ET (Pour tout x dans E , on a $Q(x)$)”

Exemple (informel) : “Tous les étudiants de l’amphi vont acheter un sandwich et une boisson” veut dire la même chose que “Tous les étudiants de l’amphi vont acheter un sandwich ET tous les étudiants de l’amphi vont acheter une boisson”.

Théorème 9 : La proposition “Il existe x dans E tel que $[P(x)$ OU $Q(x)]$ ” est équivalente à “[Il existe x dans E tel que $P(x)$] OU [il existe x dans E tel que $Q(x)$]”

Exemple (informel) : “Au moins un étudiant de l’amphi va acheter un pain au chocolat OU un croissant” veut dire la même chose que “au moins un étudiant de l’amphi va acheter un pain au chocolat” OU “au moins un étudiant de l’amphi va acheter un croissant”⁹

Théorème 10 : Si “[pour tout x dans E , $P(x)$] OU [pour tout x dans E , $Q(x)$]” alors “Pour tout x dans E , $[P(x)$ OU $Q(x)]$ ”. La réciproque est fausse.

⁹Bien se rappeler que le OU est inclusif.

Exemple : Si tous les étudiants achètent des pommes OU tous les étudiants achètent des poires, alors tous les étudiants achètent des fruits (poires ou pommes).

Pour voir que la réciproque est fausse, imaginez que tous les étudiants achètent des fruits (pommes ou poires), mais que certains étudiants n'achètent que des poires et d'autres uniquement des pommes. Alors "tous les étudiants achètent des poires OU des pommes" est vraie, mais "tous les étudiants achètent des pommes OU tous les étudiants achètent des poires" est faux.

Théorème 11 : S'il existe x dans E tel que $(P(x) \text{ ET } Q(x))$, alors il existe x dans E tel que $P(x)$ ET il existe x dans E tel que $Q(x)$. La réciproque est fausse.

Exemple : s'il existe un étudiant qui a la moyenne en analyse et qui a la moyenne en algèbre, alors il existe un étudiant qui a la moyenne en analyse ET il existe un étudiant qui a la moyenne en algèbre. La réciproque est fausse : ce n'est pas parce qu'il y a un étudiant qui a la moyenne en analyse et un étudiant qui a la moyenne en algèbre qu'il y a un étudiant qui a la moyenne dans les deux matières.

3.7 Enoncés avec l'ensemble vide

Par définition, l'ensemble vide, noté $\emptyset$, est un ensemble qui n'a aucun élément.

Une proposition du type "Il existe un élément x de l'ensemble vide qui vérifie la propriété $P(x)$ " est toujours fausse. En effet, si jamais un tel élément x existait, ce serait un élément de l'ensemble vide. L'ensemble vide aurait donc au moins 1 élément, ce qui est faux par définition.

De même une proposition du type "Pour tout élément de l'ensemble vide, on a $P(x)$ " est toujours vraie. En effet, pour que cette proposition soit fausse, il faudrait qu'il existe un élément x de l'ensemble vide tel que $P(x)$ ne soit pas satisfaite. Mais alors, cet élément x serait un élément de l'ensemble vide, et donc l'ensemble vide aurait au moins un élément. Ce n'est pas le cas, par définition.

3.8 Enoncés avec plusieurs quantificateurs

On en rencontre très souvent. Ils font un peu peur au début, mais on les domestique avec le temps.

Exemples :

"Pour tout réel x négatif ou nul, pour tout réel y positif ou nul, $xy \leq 0$ "

"Pour tout réel x , il existe un entier naturel n tel que $n \leq x < n + 1$ "

"Il existe un réel x tel que, pour tout réel y , $xy = 0$ "

3.8.1 Négation d'énoncés avec plusieurs quantificateurs

Pour nier une proposition contenant plusieurs quantificateurs, il suffit d'appliquer la règle 7 plusieurs fois (voir exemple ci-dessous). En pratique, on applique directement la règle suivante, qu'on admettra :

Règle 12 : Pour nier une proposition qui contient plusieurs quantificateurs, on transforme les "pour tout" en "il existe", les "il existe" en "pour tout" et on nie la conclusion.

Cette règle est très importante et il faut la connaître parfaitement.

Exemple : Supposons qu'on veuille nier la proposition

P : "Pour tout réel x , il existe un réel y tel que $xy = 1$ "

Première méthode : en utilisant la règle 12 plusieurs fois.

Appelons $Q(x)$ l'expression : "il existe un réel y tel que $xy = 1$ ". La proposition P peut se réécrire :

P : "Pour tout réel x , $Q(x)$ "

D'après la règle 7, sa négation est :

nonP : "Il existe un réel x tel que non $Q(x)$ "

Pour terminer il suffit donc de nier $Q(x)$. D'après la règle 7, la négation de $Q(x)$ est :

non $Q(x)$: "Pour tout réel y , non($xy = 1$)"

c'est à dire : "Pour tout réel y , $xy \neq 1$ ". On obtient donc finalement pour la négation de P :

nonP : "Il existe un réel x tel que, pour tout réel y , $xy \neq 1$ "

Deuxième méthode : en utilisant la règle 12

On veut nier la proposition P : "Pour tout réel x , il existe un réel y tel que $xy = 1$ ". La

règle 12 dit qu'il faut transformer les "pour tout" en "il existe", les "il existe" en "pour tout" et nier la conclusion. On obtient donc :

nonP : "Il existe un réel x tel que, pour tout réel y , $\text{non}(xy = 1)$ "

c'est à dire

nonP : "Il existe un réel x tel que, pour tout réel y , $xy \neq 1$ "

Pour vérifier que vous suivez : que veut dire la proposition P ci-dessus ? Est-elle vraie ? La réponse est dans la note de bas de page.¹⁰

Autre exemple : soient A, B, C des ensembles. Supposons qu'on veuille nier une proposition du type :

P : "Il existe a dans A tel que, pour tout b dans B, il existe c dans C tel que $Q(a, b, c)$ "

où $Q(a, b, c)$ est une expression qui, pour toutes valeurs données à a , b et c , est une proposition.

Ca paraît assez casse-tête mais en fait, avec un peu d'habitude, c'est très facile.

Première méthode : en appliquant la règle 7 plusieurs fois.

On obtient dans l'ordre les expressions suivantes pour nonP :

Etape 1 : Pour tout a dans A, non[pour tout b dans B, il existe c dans C tel que $Q(a, b, c)$]

Etape 2 : Pour tout a dans A, il existe b dans B tel que, non[il existe c dans C tel que $Q(a, b, c)$]

Etape 3 : Pour tout a dans A, il existe b dans B tel que, pour tout c dans C, $\text{non}Q(a, b, c)$.

Deuxième méthode : en appliquant la règle 12. On obtient directement la proposition de l'étape 3 ci-dessus. Rappelons qu'en pratique, on applique toujours directement la règle 12.

3.8.2 Enchaînement des quantificateurs

Considérons une proposition avec plusieurs quantificateurs comme :

Q : "Pour tout réel x , il existe un entier naturel n tel que $n \leq x < n + 1$ "

¹⁰La proposition P veut dire que tous les réels ont un inverse. C'est faux, car 0 n'a pas d'inverse.

Considérons la proposition suivante, obtenue à partir de Q en intervertissant "Pour tout réel x " et "il existe un entier naturel n tel que" :

R : "Il existe un entier naturel n tel que, pour tout réel x , $n \leq x < n + 1$ "

Les propositions Q et R sont elles équivalentes ? Y-en-a-t-il une qui implique l'autre ? Cette section répond à ce type de questions.

Théorème 13 : Soient Q et R les propositions suivantes :

Q : "Pour tout élément x de E , pour tout élément y de F , on a $P(x, y)$ "

R : "Pour tout élément y de E , pour tout élément x de F , on a $P(x, y)$ "

Les propositions Q et R sont équivalentes.

On dit qu'on peut intervertir deux "pour tout" qui se suivent. De même :

Théorème 14 : Soient Q' et R' les propositions suivantes :

Q : "Il existe un élément x de E tel que : il existe un élément y de F tel que $P(x, y)$ "

R : "Il existe un élément y de F tel que : il existe un élément x de E tel que $P(x, y)$ "

Les proposition Q et R sont équivalentes.

On dit qu'on peut intervertir deux "il existe" qui se suivent.

Remarque : à la place de la formulation assez lourde de Q ou de R, on écrit plutôt : "il existe x dans E et y dans F tels que $P(x, y)$ "

Théorème 15 : considérons les propositions suivantes

Q : "Pour tout x dans E , il existe y dans F tel que $P(x, y)$ "

R : "Il existe y dans F tel que, pour tout x dans E , $P(x, y)$ "

R implique Q, mais en général Q n'implique pas R.

On dit qu'on **ne peut pas intervertir un "pour tout" et "il existe"**. Pour comprendre ce résultat, considérons l'exemple suivant.

Soit E l'ensemble des épreuves des derniers jeux olympiques. Soit F l'ensemble des athlètes. Considérons les propositions suivantes :

P : "Pour toute épreuve y , il existe un athlète x tel que l'athlète x a remporté l'épreuve y "

Q : "Il existe un athlète x tel que, pour toute épreuve y , l'athlète x a remporté l'épreuve y "

Dans la proposition P, l'athlète x qui a remporté l'épreuve y dépend de y . Par exemple, si y est l'épreuve du 100m masculin, x est le vainqueur du 100m masculin ; si y est l'épreuve du saut à la perche féminin, x est la gagnante du saut à la perche féminin, et il y a peu de chances que ce soit la même personne !

La proposition P signifie donc que chaque épreuve a été remportée par au moins un athlète, ce qui est assez normal. En revanche, dans la proposition Q, l'athlète x est le même pour toutes les épreuves y . La proposition Q signifie donc qu'il y a un athlète qui a remporté toutes les épreuves. Quel incroyable super-champion !

Voici un exemple plus mathématique :

P : "Pour tout réel x , il existe un réel y tel que $y > x$ "

Q : "Il existe un réel y tel que, pour tout réel x , $y > x$ ".

La proposition P signifie que si on fixe un nombre réel x , on peut trouver un nombre réel y strictement plus grand que x . C'est vrai, il suffit de prendre $y = x + 1$. En revanche, la proposition Q signifie qu'il y a un nombre réel qui est strictement plus grand que tous les autres réels. C'est bien entendu faux.

La règle à retenir est la suivante : **on peut intervertir deux "pour tout" qui se suivent ou deux "il existe" qui se suivent sans changer le sens de la proposition. En revanche, on ne peut pas intervertir un "pour tout" et un "il existe".**

C'est très important !

Remarque : pour bien indiquer que dans la proposition

"Pour tout élément x de E, il existe un élément y de F tel que $P(x,y)$ "

l'élément y n'est pas à priori le même pour tous les x , certains écrivent :

"Pour tout élément x de E, il existe un élément y_x de F tel que $P(x, y_x)$ "

L'inconvénient est que quand on veut nier "Pour tout élément x de E, il existe un élément y_x de F tel que $P(x, y_x)$ " il ne faut pas seulement changer le "pour tout" en "il existe" et le "il existe" en "pour tout", mais aussi remplacer y_x par y tout court.

3.9 Ecriture formalisée

3.9.1 Les symboles

Dans les formules :

- x est un élément de E s'écrit $x \in E$
- "pour tout" s'écrit " $\forall$ " (" $\forall$ " se lit soit "pour tout", soit "quel que soit")
- "il existe" s'écrit " $\exists$ "

Ces symboles sont compris par tous les mathématiciens du monde.

Exemples :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

se lit : "Pour tout élément x de $\mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$ "

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 0$$

se lit : "Il existe un élément x de $\mathbb{R}$ tel que $x^2 = 0$ "

Exemples avec plusieurs quantificateurs :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$$

se lit : "pour tout élément x de $\mathbb{R}$, il existe un élément y de $\mathbb{R}$ tel que $x + y = 0$."

On pourrait dire aussi, avec le même sens : "pour tout réel x , il existe un réel y tel que $x + y = 0$." Cela signifie que tout nombre réel a un opposé, ce qui est bien sûr vrai.

La proposition

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 0$$

se lit : "il existe un élément y de $\mathbb{R}$ tel que, pour tout élément x de $\mathbb{R}$, $x + y = 0$ "

On pourrait dire aussi : "il existe un réel y tel que, pour tout réel x , $x + y = 0$ ". Cela signifie qu'il existe un réel y tel que tous les nombres réels sont égaux à $-y$, ce qui est bien sûr faux.

La proposition

$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, xy < 0$$

se lit : "il existe un x dans $\mathbb{R}$ et il existe un y dans $\mathbb{R}$ tels que $xy < 0$ "

C'est vrai, par exemple $x = 1$ et $y = -1$. La proposition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \geq 0$$

se lit : "pour tout x dans $\mathbb{R}$, pour tout y dans $\mathbb{R}$, on a $xy \geq 0$ ". Cela veut dire que le produit de deux nombres réels est toujours positif. C'est bien entendu faux.

Règles de lecture des virgules dans les formules :

La virgule après “ $\exists$ ” se lit “tel que”. La virgule après un “ $\exists$ ” qui précède immédiatement un autre “ $\exists$ ” peut aussi se lire “et”.

La virgule après “ $\forall$ ” se lit “on a” ou ne se lit pas. La virgule après un “ $\forall$ ” qui précède immédiatement un autre “ $\forall$ ” peut aussi se lire “et”.

3.9.2 Règles de manipulation de “ $\forall$ ” et “ $\exists$ ”

Les règles de manipulation de “ $\forall$ ” et “ $\exists$ ” se déduisent des règles de manipulation de “pour tout” et de “il existe” :

Interversion de “ $\forall$ ” et de “ $\exists$ ”

Intervertir deux “ $\forall$ ” qui se suivent ou deux “ $\exists$ ” qui se suivent ne modifie pas le sens d’un énoncé. **Si un énoncé comprend un “ $\forall$ ” et un “ $\exists$ ”, l’ordre dans lequel ils apparaissent est fondamental.**

Négation d’énoncés contenant “ $\exists$ ” ou “ $\forall$ ”.

Soit E un ensemble. La négation de

$$\forall x \in E, P(x)$$

est

$$\exists x \in E, \text{non}P(x)$$

La négation de

$$\exists x \in E, P(x)$$

est

$$\forall x \in E, \text{non}P(x)$$

Plus généralement, on a la règle suivante : **pour nier un énoncé comprenant des “ $\forall$ ” et des “ $\exists$ ”, on transforme les $\forall$ en $\exists$, les $\exists$ en $\forall$ et on nie la conclusion.**

Exemple : la négation de

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$$

est

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \neq 0$$

La négation de

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \geq 0$$

est

$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, xy < 0$$

(ceci exprime la propriété suivante : la négation de "le produit de deux nombres réels est toujours positif ou nul" est "il existe deux nombres réels dont le produit est strictement négatif").

3.10 Négation de propositions contenant des quantificateurs et des implications.

Soit E un ensemble. Pour nier une proposition du type

A : "Pour tout x dans E , si $P(x)$ alors $Q(x)$ "

on procède en deux temps. Premier temps : appelons $R(x)$ l'expression

$R(x)$: "si $P(x)$ alors $Q(x)$ ".

La proposition A se réécrit alors :

A : "Pour tout x dans E , $R(x)$ "

et sa négation est :

non A : "Il existe x dans E tel que non $R(x)$ "

Il ne reste plus qu'à exprimer la négation de $R(x)$. Mais la négation de "Si P alors Q " est " P ET non Q ". La négation de A est donc :

non A : $P(x)$ "Il existe x dans E tel que ($P(x)$ ET non $Q(x)$)"

Exemple : Considérons la proposition suivante :

A : "Pour tout réel x , si $x \geq 2$ alors $x^2 \geq 9$ "

Sa négation est :

non A : "Il existe un réel x tel que $x \geq 2$ et $x^2 < 9$ "

On retient : la négation de "pour tout x dans E , si $P(x)$ alors $Q(x)$ " est "il existe x dans E tel que ($P(x)$ ET non $Q(x)$)".

De même : la négation de "il existe x dans E tel que (si $P(x)$ alors $Q(x)$)" est "pour tout x dans E , ($P(x)$ ET non $Q(x)$)"

En écriture formalisée, ces propriétés se transposent ainsi :

La négation de

$$\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$$

est

$$\exists x \in E, P(x) \text{ ET } \text{non}Q(x)$$

La négation de

$$\exists x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$$

est

$$\forall x \in E, P(x) \text{ ET } \text{non}Q(x)$$

Attention : prendre la négation d'un énoncé comprenant une implication est parfois difficile parce que l'énoncé de départ est en fait incomplet.

Exemple : soit E un ensemble et A et B des sous-ensembles de E . On peut accepter l'énoncé suivant (incomplet) qui définit l'inclusion de A dans B :

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Mais si on veut écrire que A n'est pas inclus dans B , il faut d'abord réécrire l'énoncé complet :

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Puis nier les deux membres de l'équivalence :

$$\text{non}(A \subset B) \Leftrightarrow (\exists x \in E, x \in A \text{ ET } x \notin B)$$

3.11 Les signes " $\exists$ " et " $\forall$ " ne s'utilisent que dans les formules.

Ces signes ne sont pas des abréviations. Il faudrait plutôt les considérer comme appartenant à une autre langue, la langue mathématique.

Ne jamais utiliser les symboles $\forall$ et $\exists$ dans des phrases en français.

Un énoncé comme : " $\forall$ réel x , $\exists$ réel y tel que $x + y = 0$ " n'est pas correct.¹¹

Énoncés corrects :

"Pour tout réel x , il existe un réel y tel que $x + y = 0$ "

¹¹C'est un peu comme si vous écriviez : "For all réel x , there exists a réel y tel que $x + y = 0$ ". Ca ferait bizarre !

“Pour tout réel x dans $\mathbb{R}$, il existe y dans $\mathbb{R}$ tel que $x + y = 0$ ”

“ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$ ”

Enoncés acceptables :

“Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y = 0$ ”

“ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y = 0$ ”

“ $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geq 0$ ”

Enoncés inacceptables :

“ $\forall$ réel x , $\exists$ un réel y , $x + y = 0$ ”

“ $\forall$ réel x , $\exists$ réel y tel que $x + y = 0$ ”

“ $\forall x$ dans $\mathbb{R}$, $\exists y$ dans $\mathbb{R}$, $x + y = 0$ ”

Etc.

3.12 “Il existe au moins un”, “il existe au plus un”, “il existe un unique”

On a vu qu’en mathématiques, “il existe” veut dire la même chose qu’“il existe au moins un”, c’est à dire “il y a un, deux, trois ou plus”. On utilisera aussi d’autres expressions proches mais différentes et dont il faut connaître le sens :

“Il existe au plus un élément x de E tel que $P(x)$ ” signifie que le nombre d’éléments de E tels que $P(x)$ est vraie est égal à 0 ou à 1 (mais pas 2, ni plus que 2).

Exemples : “il existe au plus un réel x tel que $x^2 = 0$ ” est une proposition vraie (le nombre de réels dont le carré est nul est égal à un, donc à zéro ou un).

“Il existe au plus un réel x tel que $x^2 < 0$ ” est aussi une proposition vraie (il n’y a pas de réels dont le carré est nul, donc il y en a zéro, donc il y en a zéro ou un).

“Il existe au plus un réel x tel que $x^2 = 1$ ” est une proposition fausse.

“Il existe au plus un réel x tel que $x^2 \geq 0$ ” est aussi une proposition fausse.

“Il existe un unique élément x de E tel que $P(x)$ ” signifie : le nombre d’éléments x de E tels que $P(x)$ est vraie est exactement égal à 1. En d’autres termes, “Il existe un unique” veut dire “il existe au moins un ET il existe au plus un”.

Exemples :

“il existe un unique réel x tel que $x^2 = 0$ ” est une proposition vraie.

“il existe un unique réel x tel que $x^2 = 1$ ” est une proposition fausse (il en existe 2).

“il existe un unique réel x tel que $x^2 = -1$ ” est une proposition fausse (il n’en existe aucun).

Négation :

La négation de “il existe” (sous entendu : “il existe au moins un”) est “il n’existe aucun”.¹²

La négation de “il existe au plus un” est “il existe au moins deux”.

La négation de “il existe un unique” est “il existe zéro OU il existe au moins deux”.

Symboles :

Nous éviterons le plus possible d’utiliser les symboles pour “il existe au plus un” et pour “il existe un unique”. Cependant, vous les rencontrerez peut-être dans des livres. Le symbole pour “il existe au plus un” est “!” ; le symbole pour “il existe un unique” est “ $\exists!$ ”. Par exemple : “ $\exists!n \in \mathbb{N}, n^2 = 4$ ” se lit : “il existe un unique entier naturel n tel que $n^2 = 4$ ”.

Comme “ $\forall$ ” et “ $\exists$ ”, les symboles “!” et “ $\exists!$ ” ne s’utilisent que dans des formules.

¹²Plus précisément, la négation de “il existe x dans E tel que $P(x)$ ” se dit en français “il n’existe aucun x dans E tel que $P(x)$ ” ou bien “pour tout x dans E , non $P(x)$ ”. Cette deuxième version est préférable parce qu’elle est plus proche de l’écriture formelle : $\forall x \in E, \text{non}P(x)$.