

Quelques propriétés sur les ensembles, les images et les images réciproques

Voici, en plus des formules vues en cours, quelques propriétés évidentes que vous pouvez utiliser directement. Ci-dessous, si une formule est donnée sous la forme d'une implication, c'est que sa réciproque est fausse.

Ensembles :

Soit E un ensemble et A, B, C des parties de E . On a toujours :

$$A \cap B \subset A, A \cap B \subset B, A \cap B \subset A \cup B$$

Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.

Si $A \subset B$ alors pour tout ensemble C , $A \subset B \cup C$ et $A \cap C \subset B$

$$(A \subset C \text{ et } B \subset C) \Leftrightarrow A \cup B \subset C$$

$$(A \neq \emptyset \text{ ou } B \neq \emptyset) \Leftrightarrow (A \cup B \neq \emptyset)$$

Ensembles et quantificateurs (les formules ci-dessous ne sont pas les mêmes que celles du polycopié de logique)

Si $A \subset B$ et (il existe x dans A tel que $P(x)$) alors (il existe x dans B tel que $P(x)$)

Si $A \subset B$ et (pour tout x dans B , on a $P(x)$) alors (pour tout x dans A on a $P(x)$)

(Il existe x dans A tel que $P(x)$) ou (il existe x dans B tel que $P(x)$) $\Leftrightarrow$ (Il existe x dans $A \cup B$ tel que $P(x)$).

Si (il existe x dans $A \cap B$ tel que $P(x)$) alors ([Il existe x dans A tel que $P(x)$] et [il existe x dans B tel que $P(x)$]).

(Pour tout x dans A , on a $P(x)$) et (pour tout x dans B , on a $P(x)$) $\Leftrightarrow$ (pour tout x dans $A \cup B$, on a $P(x)$)

Image et image réciproque

Soient E, F des ensembles. Soient $A \subset E$; $A' \subset E$, $B \subset F$, $B' \subset F$.

Si $A \subset A'$ alors $f(A) \subset f(A')$. Réciproque fausse en général (vraie quand f est injective)

Si $B \subset B'$ alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$. Réciproque fausse en général (vraie quand f est surjective).

$$f(E) \subset F ; \quad f^{-1}(F) = E ; \quad f^{-1}(f(E)) = E.$$