

Systèmes linéaires

(un polycopié détaillé sera mis en ligne et distribué ; les transparents seront également mis en ligne)

Introduction

- résolution de systèmes linéaires : problème très important en pratique et en théorie
- système de très grande taille, voire de taille arbitraire
- nécessité d'une méthode systématique et efficace
- on traite des systèmes linéaires à coefficients réels, mais méthode et résultats identiques pour coefficients complexes

Plan :

1. Qu'est-ce qu'un système linéaire ?
2. Méthode de résolution
3. Systèmes avec paramètres
4. Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire
5. (après les vacances) : écriture matricielle d'un système linéaire

Exemple de systèmes linéaires :

$$\begin{cases} 3x + 6y = -3 \\ -2x + y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases}$$

Exemple de systèmes non linéaires :

$$\begin{cases} x - y^2 = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

Notations :

Au lieu de x, y, z , etc. on notera les inconnues x_1, x_2, x_3 , etc.

Exemple : le système

$$\begin{cases} 3x + 6y = -3 \\ -2x + y = 12 \end{cases}$$

peut aussi se noter

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = -3 \\ -2x_1 + x_2 = 12 \end{cases}$$

Définition : Un *système linéaire* de n équations à p inconnues est un système du type :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

- ◇ a_{ij} et b_i sont des réels fixés.
- ◇ les *inconnues* sont $x_1, x_2, \dots, x_p$.
- ◇ les réels a_{ij} sont les *coefficients du premier membre*.
- ◇ Les réels b_i sont les *coefficients du second membre*.

Exemple : pour le système

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = -3 \\ -2x_1 + x_2 = 12 \end{cases}$$

on a

$$a_{11} = 3, a_{12} = 6,$$

$$a_{21} = -2, a_{22} = 1,$$

$$b_1 = -3 \text{ et } b_2 = 12.$$

Définition : une *solution* d'un système linéaire à p inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

est un p -uplet de réels $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie toutes les équations du système.

Un système est *compatible* s'il a au moins une solution. Deux systèmes sont *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

Exemple : $(-5, 2)$ est solution de

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = -3 \\ -2x_1 + x_2 = 12 \end{cases}$$

car :

$$\begin{cases} 3 \times (-5) + 6 \times 2 = -3 \\ -2 \times (-5) + 2 = 12 \end{cases}$$

En revanche, $(1, -1)$ n'est pas solution

Résolution d'un système linéaire

Résoudre un système linéaire, c'est en déterminer toutes les solutions.

Principe : transformer le système initial en un système équivalent plus simple, puis recommencer, jusqu'à aboutir à un système qu'on sache résoudre.

Principales opérations “autorisées”

- ◇ multiplier une ligne par une constante non nulle
- ◇ ajouter λ fois une ligne à une *autre* ligne, où λ est un réel quelconque
- ◇ échanger deux lignes

“opérations élémentaires”

On peut aussi :

- ◇ ajouter à une ligne une combinaison des autres lignes (remplacer L_k par $L_k + \sum_{i \neq k} \lambda_i L_i$).
- ◇ supprimer les lignes $0 = 0$
- ◇ conclure que le système n'a pas de solutions s'il comporte une ligne du type $0 = b_i$ avec $b_i \neq 0$.

Exemple de résolution :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3x + 6y = -3 \\ -2x + y = 12 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{matrix} \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y = -1 \\ -2x + y = 12 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 5y = 10 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{matrix} L_1 \\ \frac{1}{5}L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y = -1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{matrix} L_1 - 2L_2 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système a donc une solution unique : $(-5, 2)$

Résolution en travaillant sur le tableau des coefficients

But : ne pas se fatiguer à recopier les inconnues

Au lieu d'écrire :

$$\begin{cases} 3x + 6y = -3 \\ -2x + y = 12 \end{cases}$$

on écrit

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & -3 \\ -2 & 1 & 12 \end{array} \right)$$

En procédant comme précédemment, on obtient successivement :

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & -3 \\ -2 & 1 & 12 \end{array} \right) \\
 L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 12 \end{array} \right) \\
 L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 10 \end{array} \right) \\
 L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \\
 L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)
 \end{array}$$

c'est à dire finalement

$$\begin{cases} x & = & -5 \\ y & = & 2 \end{cases}$$

Solutions de quelques systèmes linéaires simples.

Exemple 1 : le système

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 0 = 5 \end{cases} \quad (1)$$

n'a pas de solutions.

Exemple 2 : le système

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases} \quad (2)$$

a une solution unique : $(5, 3, -2)$

Exemple 3 : le système

$$\begin{cases} x + z = -1 \\ y - 2z = 2 \end{cases} \quad (3)$$

a une infinité de solutions. L'ensemble S des solutions est l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x = -1 + z$ et $y = 2 + 2z$. On note

$$S = \{(-1 + z, 2 + 2z, z), z \in \mathbb{R}\}$$

La variable z est dite *libre*, les variables x et y sont dites *liées*.

Exemple 4

$$\begin{cases} x_1 & & + 2x_4 & + 3x_5 & = & 2 \\ & x_2 & & + 2x_5 & = & -3 \\ & & x_3 & - 2x_5 & = & 0 \end{cases} \quad (4)$$

2 variables libres : x_4 et x_5 ; 3 variables liées : x_1 , x_2 , et x_3 .

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ solution ssi $x_1 = 2 - 2x_4 - 3x_5$, $x_2 = -3 - 2x_5$ et $x_3 = 2x_5$.

On écrit :

$$S = \{(2 - 2x_4 - 3x_5, -3 - 2x_5, 2x_5, x_4, x_5), (x_4, x_5) \in \mathbb{R}^2\}$$

Exemple 5 :

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} x_1 & + & 2x_2 & & + & 3x_5 & = & 2 \\ & & & x_3 & + & 2x_5 & = & -3 \\ & & & & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

Comme le système précédent, sauf qu'on a changé le rôle des inconnues. Les variables libres sont maintenant x_2 et x_5 .

$$S = \{(2 - 2x_2 - 3x_5, x_2, -3 - 2x_5, 2x_5, x_5), (x_2, x_5) \in \mathbb{R}^2\}$$

Systèmes échelonnés

- une ligne d'un tableau de coefficients est *non nulle* si les coefficients *du premier membre* situés sur cette ligne ne sont pas tous nuls.
- un tableau de coefficients est *échelonné* si chaque ligne non nulle commence par davantage de 0 que la précédente. Un système linéaire est échelonné si le tableau de coefficients correspondant est échelonné.
- on appelle *pivots* d'un système échelonné les coefficients qui apparaissent en tête des lignes non nulles.

Exemples :

$$a) \quad \begin{cases} 3x + 6y = -3 \\ -2x + y = 12 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} -2x + y + 3z = 5 \\ + 4z = 0 \end{cases}$$

a) non échelonné ; b) échelonné, pivots -2 et 4

$$c) \quad \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 12 \\ + 3y + 6z = -3 \\ + + 5z = -10 \end{cases}$$

$$d) \quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ + 7x_2 = 0 \\ + = 0 \\ + = 3 \end{cases}$$

c) échelonné : pivots 2 , 3 et 5 ; d) échelonné : pivots 2 et 7

Systèmes échelonnés réduits

- un tableau de coefficient est *échelonné réduit* s'il est échelonné, si les pivots sont égaux à 1, et si les coefficients situés au-dessus des pivots sont nuls.
- les variables qui correspondent aux colonnes où il n'y a pas de pivots sont dites *libres* ; les autres sont dites *liées*.

Exemple :

$$a) \quad \begin{cases} x + z = -1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$$

a) échelonné réduit, z libre, x et y liées.

Autres exemples :

$$b) \quad \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + 2z = -1 \\ z = -2 \end{cases} \quad c) \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

b) échelonné mais pas échelonné réduit ;

c) échelonné réduit, pas de variables libres.

$$d) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_5 = 2 \\ x_3 + 2x_5 = -3 \\ x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

d) échelonné-réduit, x_2 et x_5 libres.

Solutions d'un système échelonné réduit

- ◇ s'il y a une ligne du type $0 = \beta$ avec $\beta \neq 0$, pas de solutions.
- ◇ Sinon :
 - si pas de variables libres, exactement une solution qui se lit de manière immédiate.
 - si une ou plusieurs variables libres, infinité de solutions : les variables libres peuvent prendre n'importe quelles valeurs et les variables liées s'expriment en fonction des variables libres.

Bilan : pour résoudre un système linéaire, il suffit de le transformer en un système échelonné réduit équivalent.

Mise d'un système sous forme échelonné réduite - exemples

2 phases :

- 1) mise sous forme échelonnée avec pivots égaux à 1 ;
- 2) mise sous forme échelonnée réduite.

Exemple : Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} 3x + 3y + 3z = 18 \\ -x + 3y + 7z = -10 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases} \quad (6)$$

Forme symbolique :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 18 \\ -1 & 3 & 7 & -10 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{array} \right)$$

Première phase de la résolution.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 18 \\ -1 & 3 & 7 & -10 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{array} \right)$$

a) on transforme le pivot en un 1 :

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 7 & -10 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{array} \right)$$

b) on fait apparaître des 0 sous le pivot

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

On recommence sur le sous-système en bas à droite.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

a') on transforme le pivot en un 1

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

b') on fait apparaître des 0 sous le pivot

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

a") on transforme le pivot en un 1

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Fin de la 1ère phase. Dans la 2nde phase, on met le système sous forme échelonné réduite.

2nde phase :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

On fait apparaître des 0 au dessus du *dernier* pivot.

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

puis on fait apparaître un zéro au dessus du deuxième pivot :

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Terminé !

Exemple 2. (comment continuer quand le pivot est nul)

Résoudre :

$$\begin{cases} 2x_3 - 2x_4 + 8x_5 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_5 = -1 \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 - 8x_5 = -1 \end{cases} \quad (7)$$

Forme symbolique :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 2 & -2 & 8 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ -2 & -4 & -1 & 0 & -8 & -1 \end{array} \right)$$

Le pivot est nul. On ne peut pas utiliser la 1ère ligne pour éliminer x_1 des 2e et 3e équations...

↪ on échange la 1ère et la 2e ligne.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 2 & -2 & 8 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ -2 & -4 & -1 & 0 & -8 & -1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 8 & -6 \\ -2 & -4 & -1 & 0 & -8 & -1 \end{array} \right)$$

On fait apparaître des 0 sous le pivot :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

Le sous-système obtenu en éliminant la 1ère ligne et la 1ère colonne commence par une colonne de 0.

↪ On travaille sur le sous-système obtenu en supprimant la 1ère ligne et les deux 1ères colonnes

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

On rend le pivot égal à 1 :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

puis on met des 0 sous le pivot

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Fin de la 1ère phase.

Deuxième phase : on met des 0 au dessus des pivots.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Terminé !

Mise d'un système sous forme échelonnée réduite - théorie

Théorème : N'importe quel système linéaire peut se mettre sous forme échelonné réduite par une suite d'opérations élémentaires.

Idée de la preuve : récurrence sur le nombre d'inconnues du systèmes (voir poly). On ramène le problème au fait de mettre sous forme échelonné réduit un système qui a une inconnue de moins, puis on recommence.

Systèmes avec paramètres

Exemples :

$$\begin{cases} 3x + 6y = a \\ -2x + y = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - a + 6y = 0 \\ -2x + y - b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - a + 6y = b \\ -2x + y - a = 0 \end{cases}$$

Paramètres au second membre uniquement

Pas de problème pour mettre sous forme échelonnée réduite, puis 2 cas :

◇ 1er cas : si pas de ligne du type $0 = f(\text{paramètres})$.

S'il y a des lignes du type $0 = \alpha$ avec $\alpha \neq 0$, pas de solutions ; sinon, on exprime les solutions en fonctions des paramètres.

◇ 2nd cas : s'il y a $k \geq 1$ lignes $0 = f_1(\text{paramètres})$, $0 = f_2(\text{paramètres})$, ..., $0 = f_k(\text{paramètres})$.

Si les valeurs des paramètres sont telles que $f_i(\text{paramètres}) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on est ramené au 1er cas. Sinon, pas de solutions.

Exemple : déterminer les solutions du système suivant en fonction des valeurs des paramètres a, b, c, d .

$$\begin{cases} 2x_3 - 2x_4 + 8x_5 = a \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_5 = b \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 - 8x_5 = c \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_5 = d \end{cases} \quad (8)$$

On montre que le système (8) est équivalent au système :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_5 = -b - c \\ x_3 + 2x_5 = 2b + c \\ x_4 - 2x_5 = -a/2 + 2b + c \\ 0 = -b - c + d \end{cases}$$

Deux cas : si $-b - c + d \neq 0$, pas de solutions. Si $-b - c + d = 0$,

$$S = \left\{ (-b - c - 2x_2 + 3x_5, x_2, 2b + c - 2x_5, -\frac{a}{2} + 2b + c - 2x_5, x_5), (x_2, x_5) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Paramètres au premier membre

ATTENTION DANGER ! Les opérations $L_k \leftarrow \lambda L_k$ et $L_k \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_k$ sont interdites si $\lambda = 0$.

Règle d'or : *lorsqu'on veut faire une opération du type $L_k \leftarrow \lambda L_k$ ou bien diviser quelque chose par λ , où λ est une expression dépendant de paramètres, il faut soit se débrouiller autrement, soit distinguer le cas $\lambda = 0$ du cas $\lambda \neq 0$.*

Remarque : bien distinguer l'opération $L_k \leftarrow L_k + \lambda L_i$ de l'opération $L_k \leftarrow \lambda L_k + L_i$

Trucs pour éviter de distinguer trop de cas :

- Echanger deux lignes afin de faire apparaître un pivot qui ne comprend pas de paramètres
- Ne pas toujours se ramener au cas où le pivot vaut 1.

Paramètres aux deux membres : on combine les méthodes

Exemple : déterminer l'ensemble S des solutions du système (S) ci-dessous, en fonction de la valeur du paramètre a .

$$(S) \quad \begin{cases} ax + ay = a \\ x + y = 2 \end{cases}$$

1ère méthode correcte (traiter le cas $a = 0$ à part)

1er cas : si $a \neq 0$. On a alors :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{a}L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + y = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

et le système n'a pas de solution : $S = \emptyset$.

2nd cas : si $a = 0$. Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

et l'ensemble des solutions est $S = \{(2 - y, y), y \in \mathbb{R}\}$.

Conclusion : si $a \neq 0$, il n'y a pas de solutions : $S = \emptyset$; si $a = 0$, l'ensemble des solutions est $S = \{(2 - y, y), y \in \mathbb{R}\}$

2nde méthode correcte (changer de pivot)

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} ax + ay = a \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + y = 2 \\ ax + ay = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - aL_1 \end{matrix} \begin{cases} x + y = 2 \\ 0 = -a \end{cases}$$

Conclusion : si $a \neq 0$, il n'y a pas de solutions : $S = \emptyset$; si $a = 0$, l'ensemble des solutions est $S = \{(2 - y, y), y \in \mathbb{R}\}$

Exemple de méthode incorrecte

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} ax + ay = a \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{a}L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + y = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Conclusion (fausse) : quelle que soit la valeur de a , le système n'a pas de solutions : $\mathcal{S} = \emptyset$.

Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

- système homogène associé à un système linéaire
- rang d'un système linéaire
- solutions d'un système homogène
- solutions d'un système quelconque

Système homogène associé à un système linéaire

- un système est *homogène* si les coefficients du second membre sont tous nuls.
- le *système homogène associé* à (S) est le système qui a le même premier membre mais où le second membre est nul.

Exemple : Le système homogène associé au système

$$\begin{cases} 3x + 6y = -3 \\ -2x + y = 12 \end{cases}$$

est

$$\begin{cases} 3x + 6y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$$

Rang d'un système linéaire

Soit (S) un système linéaire et (S_0) le système homogène associé. Si on transforme (S_0) en un système échelonné et qu'on élimine les lignes $0 = 0$, on obtient un système de r équations. Cet entier r est indépendant de la manière dont on a opéré. On l'appelle *rang* du système linéaire (S) .

- ◇ le rang de (S) peut aussi être défini comme le nombre de pivots (ou d'inconnues liées) dans n'importe quel système échelonné équivalent à (S) .
- ◇ 2 systèmes équivalents ont même rang (mais réciproque fausse)
- ◇ pour déterminer le rang d'un système, il suffit de le mettre sous forme échelonnée

Exemple : le système ci-dessous à rang $r = 3$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & + & 2x_2 & & + & 3x_5 & = & 2 \\ & & & x_3 & + & 2x_5 & = & -3 \\ & & & & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

le système ci-dessous aussi

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & + & 2x_2 & & + & 3x_5 & = & 2 \\ & & & x_3 & + & 2x_5 & = & -3 \\ & & & & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & & + & 3x_5 & = & 2 \end{array} \right.$$

Remarques :

◇ un système linéaire et le système homogène qui lui est associé ont même rang.

Notons r le rang, n le nombre d'équations, p le nombre d'inconnues. On a :

◇ $r \leq \min(n, p)$.

◇ si $r = n$, dans un système échelonné réduit équivalent à $(\mathcal{S})$, il ne peut pas y avoir de lignes du type $0 = \beta$. Le système admet donc au moins une solution.

◇ si $r = p$, il n'y a pas d'inconnues libres. Le système a donc au plus une solution.

- ◇ si $r = n = p$ (système carré de rang maximal), le système est dit "de Cramer". Il a exactement une solution.
- ◇ si $r < p$, il y a au moins une inconnue libre. Si le système est compatible, il a donc une infinité de solutions.
- ◇ le rang d'un système n'indique pas, en général, si ce système est compatible ou non.

Solutions d'un système homogène

Notations : soient $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On note :

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_p) \quad \text{et} \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_p + y_p)$$

Soit S_0 l'ensemble des solutions d'un système homogène (S_0).
On a toujours (voir poly) :

- (a) S_0 non vide (car $(0, 0, \dots, 0) \in S_0$) ;
- (b) si $\mathbf{x} \in S_0$, alors pour tout réel λ , $\lambda \mathbf{x} \in S_0$;
- (c) si $\mathbf{x} \in S_0$ et $\mathbf{y} \in S_0$, alors $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S_0$.

Corollaire : soit $S_0 = \{(0, 0, \dots, 0)\}$, soit S_0 infini.

Compléments : dans n'importe quel système échelonné équivalent à (S_0) , il y a $p - r$ inconnues libres. L'ensemble S_0 des solutions de (S_0) a donc $p - r$ "degrés de liberté". Au second semestre, on dira que S_0 est un "espace vectoriel" de "dimension" $d = p - r$.

On verra qu'un tel espace a une structure bien particulière :

- si $d = 0$ ($r = p$), S_0 ne contient que le point $\{(0, 0, \dots, 0)\}$.
- si $d = 1$ ($r = p - 1$), S_0 est une droite passant par $(0, 0, \dots, 0)$.
- si $d = 2$ ($r = p - 2$), S_0 est un plan contenant $(0, 0, \dots, 0)$.

etc.

Solutions d'un système linéaire quelconque

- un système non homogène n'a pas forcément de solutions.
- soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire et $(\mathcal{S}_0)$ le système homogène associé. Soit S et S_0 l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ et de $(\mathcal{S}_0)$.

Proposition : Si le système linéaire $(\mathcal{S})$ admet la solution $\mathbf{x}$, alors

$$S = \mathbf{x} + S_0 \text{ c'est à dire : } S = \{\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{y} \in S_0\}$$

Preuve : voir poly

Corollaire : un système linéaire n'a soit aucune solution, soit exactement une solution, soit une infinité de solutions.

Exemple

$$(S) \quad \begin{cases} x - 2y + z = -6 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

$$(S_0) \quad \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

$$S_0 = \{(2y, y), y \in \mathbb{R}\}$$

De plus, $(-6, 0, 2) \in S$. Donc

$$S = (-6, 0, 2) + S_0 = \{(-6 + 2y, y, 2), y \in \mathbb{R}\}$$

Remarque : on a aussi $(0, 3, 2) \in S$, donc

$$S = (0, 3, 2) + S_0 = \{(2y, y + 3, 2), y \in \mathbb{R}\}$$

Interprétation géométrique de $S = \mathbf{x} + S_0$

- si $\mathbf{x}$ est solution de (S) , alors l'ensemble des solutions de (S) est l'image par la translation de vecteur $\mathbf{x}$ de l'ensemble des solutions du système homogène associé.
- **Si** l'ensemble des solutions de (S) est non vide, il a donc la même "forme" que l'ensemble des solutions du système homogène associé. C'est un point si $r = p$, une droite si $r = p - 1$, un plan si $r = p - 2$, etc.