UNIVERSITE PARIS-DAUPHINE DUMI2E 1ère année, 15 octobre 2007

Contrôle continu d'algèbre : sujet 1

Partie I

Dans cette partie, aucune justification n'est demandée. Pour les questions auxquelles il est demandé de répondre par oui ou par non, ou par vrai ou faux, **une réponse fausse vaut la moitié des points en négatif.**

Exercice 1 (1,5 pt)

Les propositions suivantes sont-elles vraies pour toutes propositions P et Q ? Répondre en encerclant Vrai ou Faux.

1) (0,5pt) P et (non Q ou P) $\Leftrightarrow$ P Vrai Faux

2) (1pt) non (nonP ou (P et non Q)) $\Rightarrow$ P et Q Vrai Faux

Exercice 2 (2,5 pts).Donner la négation des propositions suivantes. Dire si P est vraie ou fausse en encerclant la bonne réponse.

1) P : Il existe un réel x tel que, pour tout réel y, si ($y < x$ et $y \leq 1$) alors $y^2 > x^2$.

non P :

P vraie P fausse

2) Q : Pour tout ϵ dans $\mathbb{R}_+^*$, pour tout x dans $\mathbb{R}$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x - y| < \alpha$ alors $|x^2 - y^2| < \epsilon$

non Q :

3) R : $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, |x - y| < \alpha \Rightarrow |x^2 - y^2| < \epsilon$.

non R :

Exercice 3 (2 pts).

Soit

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ x & \mapsto &]x, +\infty[\end{array}$$

Sans justifier, donner la valeur de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(n)$. Répondre ci-dessous :

a) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(n) =$

b) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(n) =$

Exercice 4 (2pts)

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? Répondre en écrivant Oui ou Non dans les cases du tableau.

$$f_1: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad f_2: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

$$f_3: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad f_4: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

application	f_1	f_2	f_3	f_4
injective ? Répondre oui ou non				

Exercice 5 (2 pts) Sans justifier, donner tous les couples de réels (x, y) tels que $(x^2 - 1)y = 0$ et $x(y + 2) = 0$. Ecrire les couples solutions ci-dessous :

UNIVERSITE PARIS-DAUPHINE DUMI2E 1ère année, 15 octobre 2007

Contrôle continu d'algèbre
Partie II : problème

Dans cette partie, sauf mention contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.

On rappelle que pour tout entier naturel non nul n, on a $n^0 = 1$. Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (n,p) & \mapsto & 2^n 3^p \end{array}$$

1) (1pt) Sans justifier, donner deux exemples d'entiers naturels qui n'appartiennent pas à $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$.

2) (1pt) Montrer qu'il existe un sous-ensemble B de $\mathbb{N}$ tel que $f(f^{-1}(B)) \neq B$.

3) (1pt) Déterminer l'image par f de $\mathbb{N}\times\{0\}$.

4)(1,5 pt) On admet que le produit de deux entiers naturels impairs est impair. Montrer que si q est un entier naturel impair alors pour tout p dans $\mathbb{N}$, q^p est impair.

6) (1,5 pt) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les entiers naturels n et p pour que 2^n3^p soit pair. En déduire l'image réciproque par f de l'ensemble des entiers pairs, c'est à dire de l'ensemble $2\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$.

Soient n, n', p et p' des entiers naturels. On rappelle que $(n,p) \neq (n',p')$ si et seulement si $n \neq n'$ ou $p \neq p'$.

7) (2pts) Montrer que si $n > n'$, alors il existe un entier m tel que $f(n,p)/m$ est pair et $f(n',p')/m$ est pair. En déduire que si $n \neq n'$ alors $f(n,p) \neq f(n',p')$.

8) (2pts) Montrer que l'application f est injective.