Université Paris-Dauphine,
L3, Année 2011-2012

Partiel de théorie des Jeux

La calculatrice et les documents de cours ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Question de cours. Soit $\Gamma = (A, B, g)$ un jeu à 2 joueurs et à somme nulle joué en stratégies pures. Donner la définition d'un point selle. Démontrer ensuite que si (a^*, b^*) est un point selle, alors a^* et b^* sont optimales et le jeu à une valeur en stratégies pures.

Exercice 1. Deux amis décident de jouer à Pierre Feuille Ciseaux avec une mise de 1 euros, mais en pimentant un peu les règles. Ainsi le premier joueur perd à tous les coups s'il joue Ciseaux ; mais pour compenser ce désavantage il reçoit c euros si les deux joueurs jouent Feuille (où c est un montant dans $[0, 2]$ connu de tous). Ils jouent donc au jeu à somme nulle suivant (on rappelle que le Joueur 1 maximise et choisit une ligne) :

$$\begin{array}{cccc} & P^2 & F^2 & C^2 \\ P^1 & 0 & -1 & 1 \\ F^1 & 1 & c & -1 \\ C^1 & -1 & -1 & -1 \end{array}$$

1. Trouver le minmax et le maxmin en stratégies pures. Le jeu a t-il une valeur en stratégies pures ?
2. Montrer que quelque soit $c \in [0, 2]$, l'élimination des stratégies strictement dominées (par des stratégies mixtes) permet d'éliminer une stratégie du Joueur 1, puis une du Joueur 2.
3. Déterminer la valeur du jeu en stratégies mixtes, ainsi que les stratégies optimales des joueurs, en fonction de c.

Exercice 2. N fermiers ($N \geq 2$) décident simultanément de la quantité de blé que chacun produit. Le fermier i produit une quantité $q^i \in [0, +\infty[$, et la quantité totale produite est noté $Q = q^1 + \cdots q^k$. Le coup de production est supposé nul, et le prix unitaire de vente est donné par $p = f(Q)$. Le gain du joueur i est donc $g^i(q^1, \cdots, q^N) = q^i f(Q)$. On ne s'intéressera qu'aux stratégies pures ; les deux questions sont indépendantes.

1. Dans cette question on suppose que le prix est donné par $f(Q) = e^{-Q}$. Déterminer l'ensemble de meilleure réponse du joueur i en fonction du profil d'action des autres joueurs. En déduire qu'il existe un équilibre en stratégies dominantes dont on calculera le paiement pour chaque joueur.
2. Dans cette question on suppose que le prix est donné par $f(Q) = (1 + Q)^{-2N}$. Déterminer l'ensemble de meilleure réponse du joueur i en fonction du profil d'action des autres joueurs. En déduire qu'il existe un unique équilibre de Nash dont on donnera le paiement pour chaque joueur. Montrer que cet équilibre n'est pas un équilibre en stratégies dominantes.

Exercice 3. Une compagnie aérienne a égaré les valises de deux passagers (J^1 et J^2) et doit leur fournir une compensation financière. Elle leur propose la procédure suivante : chacun d'entre eux doit proposer un prix de dédommagement (a^1 et a^2 respectivement) **entier** entre 100 et 500 euros (compris). Ils reçoivent alors chacun le prix le plus faible des deux. De plus, celui des deux qui avait donné le prix le plus faible reçoit un bonus de 20 euros (si il y avait égalité chacun reçoit un bonus de 10 euros). Formellement,

$$g^1(a^1, a^2) = \begin{cases} a^2 & \text{si } a^1 > a^2 \\ a^1 + 10 & \text{si } a^1 = a^2 \\ a^1 + 20 & \text{si } a^1 < a^2 \end{cases}$$

et

$$g^2(a^1, a^2) = \begin{cases} a^1 & \text{si } a^1 < a^2 \\ a^2 + 10 & \text{si } a^1 = a^2 \\ a^2 + 20 & \text{si } a^1 > a^2 \end{cases}$$

Les 3 parties de l'exercice sont à peu près indépendantes.

1. Dans cette partie on suppose que les joueurs choisissent leur action de manière simultanée et que les joueurs jouent en stratégies pures.
   (a) Déterminer l'ensemble de meilleure réponse de J^1 à une stratégie a^2 de J^2.
   (b) En déduire l'unique équilibre de Nash en stratégies pures. Donner son paiement.
2. Dans cette partie on suppose toujours que les joueurs jouent simultanément, mais on s'intéresse aux équilibres de Nash en stratégies mixtes. On note a^i_k la stratégie pure "proposer k euros" du Joueur i. Une stratégie mixte du Joueur i est notée $x^i = \sum_{k=100}^{500} x^i(k) a^i_k$, où $x^i(k)$ est la probabilité d'annoncer un prix de k euros. Soit (x^1, x^2) un équilibre de Nash en stratégies mixtes. On note m^i le plus grand prix sur lequel le Joueur J^i met un poids positif : $x^i(m^i) > 0$ et $x^i(k) = 0$ pour $k > m^i$.
   (a) On suppose $m^1 > m^2$. Comparer $g^1(a^1_{m^1}, x^2)$ et $g^1(a^1_{m^2}, x^2)$. En déduire une contradiction.
   (b) Si vous avez répondu à la question précédente, expliquer brièvement comment on aboutirait à une contradiction dans le cas $m^2 > m^1$.
   (c) On suppose $m^1 = m^2 \geq 101$. Comparer $g^1(a^1_{m^1}, x^2)$ et $g^1(a^1_{m^1-1}, x^2)$. En déduire une contradiction.
   (d) Conclure.
3. Dans cette partie on suppose que le Joueur 1 choisit son prix en premier. Le Joueur 2 est informé de ce choix et ne choisit qu'ensuite le prix qu'il propose en fonction de ce qu'a proposé le Joueur 1. Dans cette partie on ne s'intéresse qu'aux stratégies pures.
   (a) Dans la forme normale associée (qu'on ne cherchera pas à écrire...) combien chaque joueur a t-il de stratégies pures ?
   (b) Déterminer tous les équilibres sous jeux parfaits en stratégies pures (vous pouvez utiliser votre réponse à la question 1)a) si vous l'avez traitée). Combien y en a t-il ? Quel est le paiement de chaque joueur dans chacun d'entre eux ?
   (c) Trouver un équilibre de Nash en stratégies pures, de paiement 110 pour chaque joueur.