

Problèmes de reconstruction de matrices de bas rang : introduction

Jeudi 29 octobre 2020

Le but de ce cours est de décrire une famille d’algorithmes conçus pour des problèmes dits « de reconstruction de matrices de bas rang » et, plus particulièrement, de comprendre dans quelles circonstances on peut rigoureusement établir que ces algorithmes fonctionnent.

Ces notes correspondent à la première séance du cours. Nous y définirons d’abord les problèmes considérés et en donnerons des exemples (Section 1). Deux grandes familles d’algorithmes existent pour les résoudre, les *convexes* et les *non-convexes*. Ce sont les non-convexes qui sont l’objet du cours mais, aujourd’hui, nous présenterons les convexes ; le but est d’expliquer l’intérêt comparé des méthodes non-convexes ainsi que les difficultés spécifiques qu’elles soulèvent (Section 2). Enfin, nous donnerons le plan des séances suivantes (Section 3).

Une partie de ces notes s’appuie sur les articles de revue [Davenport and Romberg, 2016] et [Chen and Chi, 2018].

1 Définition et exemples

Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$. On note $\text{Mat}(n_1, n_2)$ l’ensemble des matrices de taille $n_1 \times n_2$, à coefficients réels ou complexes selon le contexte.

Un *problème de reconstruction de matrice de bas rang* consiste à déterminer un élément $X^s \in \text{Mat}(n_1, n_2)$ inconnu à partir de deux types d’informations :

- Des informations « simples », modélisées par la propriété « $X^s \in \mathcal{E}$ », pour certain ensemble $\mathcal{E} \subset \text{Mat}(n_1, n_2)$. Souvent, ces informations sont des mesures linéaires en les coefficients de X^s , de sorte que \mathcal{E} est un sous-espace affine de $\text{Mat}(n_1, n_2)$.
- L’information que X^s est de rang « faible » (parfois on connaît exactement le rang de X^s ; parfois on sait seulement qu’il est très inférieur à $\min(n_1, n_2)$).

On essaie en général de résoudre un tel problème en cherchant l’élément de \mathcal{E} de rang minimal :

$$\text{minimiser } \text{rang}(X) \text{ pour } X \in \mathcal{E}. \quad (1)$$

Dans les sous-sections suivantes, nous présentons trois exemples importants de tels problèmes.

1.1 Exemple 1 : complétion de matrices

Dans le problème de complétion de matrice, les informations disponibles sur X^s sont la connaissance de ses coefficients $X_{i,j}^s$ pour toutes les paires (i, j) appartenant à un certain sous-ensemble Ω de $\{1, \dots, n_1\} \times \{1, \dots, n_2\}$:

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } \text{rang}(X) \\ & \text{avec } X_{i,j} = X_{i,j}^s, \quad \forall (i, j) \in \Omega. \end{aligned}$$

Ce problème a été popularisé comme modélisation du problème *Netflix* : chaque coefficient de X^s représente la note qu'une personne utilisant Netflix i attribuerait à un film j si elle le visionnait. Les coefficients connus $X_{i,j}^s, (i, j) \in \Omega$, représentent les notes attribuées pour des films effectivement visionnés ; l'objectif est de déterminer les autres notes. L'hypothèse de bas rang permet de modéliser les similarités entre les différents films ainsi qu'entre les utilisateur/trice/s du service.

1.2 Exemple 2 : reconstruction de phase

Notre deuxième exemple n'est pas à première vue un problème de reconstruction de matrice. Dans un problème de *reconstruction de phase*, on cherche à identifier un vecteur $x^s \in \mathbb{C}^n$. On suppose que des vecteurs $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{C}^n$, dit *de mesure* sont fixés et que, pour tout $k \leq m$, on a accès à

$$|\langle x^s, v_k \rangle|,$$

où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ désigne le module complexe usuel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit hermitien. Dans la mesure où, pour tout $\phi \in \mathbb{R}$,

$$|\langle e^{i\phi} x^s, v_k \rangle| = |e^{i\phi}| |\langle x^s, v_k \rangle| = |\langle x^s, v_k \rangle|, \quad \forall k = 1, \dots, m,$$

on ne cherche jamais à reconstruire x^s de manière exacte mais seulement à *phase globale près*.

Le nom « reconstruction de phase » est dû au fait qu'il suffit de retrouver la phase des nombres $\langle x^s, v_1 \rangle, \dots, \langle x^s, v_m \rangle$ pour résoudre le problème (puisque une fois la phase connue, reconstruire x^s ne pose plus de problème : cela revient à résoudre un système linéaire).

Ce type de problèmes apparaît naturellement en optique et est à ce titre étudié depuis les années 1950 environ. En effet, les ondes électromagnétiques peuvent être modélisées par des nombres complexes dont il est généralement plus facile de mesurer le module que la phase (celle-ci oscille trop rapidement). On pourra consulter l'article de revue [Schechtman, Eldar, Cohen, Chapman, Miao, and Segev, 2015] pour une description plus détaillée des applications.

Pour certaines familles de vecteurs v_1, \dots, v_m , la reconstruction est impossible de manière non-ambiguë : il peut exister $x' \neq x^s$ (même à phase globale près) tel que

$$|\langle x^s, v_k \rangle| = |\langle x', v_k \rangle|, \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

Dans la suite du document, on supposera que notre famille est telle que ce problème ne se pose pas, c'est-à-dire que les informations à notre disposition déterminent uniquement x^s à phase globale près. On sait que, si $m \geq 4n - 4$, c'est le cas pour des familles de vecteurs « génériques »¹ [Balan, Bodmann, Casazza, and Edidin, 2009].

Un problème de reconstruction de phase est équivalent à un problème de reconstruction de matrice de rang faible via le changement de variable $X^s = x^s(x^s)^* = (x_i^s \overline{x_j^s})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}(n, n)$ (appelé *lifting*) [Chai, Moscoso, and Papanicolaou, 2011; Candès, Strohmer, and Voroninski, 2013]. En effet, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ et tout $k \in \{1, \dots, m\}$,

$$\begin{aligned} (|\langle x, v_k \rangle| = |\langle x^s, v_k \rangle|) &\iff (|\langle x, v_k \rangle|^2 = |\langle x^s, v_k \rangle|^2) \\ &\iff \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} \overline{x_i} x_j v_{k,i} \overline{v_{k,j}} = |\langle x^s, v_k \rangle|^2 \right) \\ &\iff (\langle x x^*, v_k v_k^* \rangle = |\langle x^s, v_k \rangle|^2). \end{aligned}$$

Ainsi, dans la mesure où une matrice $X \in \text{Mat}(n, n)$ est de la forme $X = x x^*$ si et seulement si

$$X \succeq 0 \quad \text{et} \quad \text{rang}(X) = 1,$$

les deux problèmes suivants sont équivalents :

$$\begin{aligned} &\text{trouver } x \in \mathbb{C}^n \\ &\text{tel que } |\langle x, v_k \rangle| = |\langle x^s, v_k \rangle|, \quad \forall k \leq m. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{trouver } X \in \text{Mat}(n, n), \\ &\text{telle que } \langle X, v_k v_k^* \rangle = |\langle x^s, v_k \rangle|^2, \quad \forall k \leq m, \\ &X \succeq 0, \\ &\text{rang}(X) = 1. \end{aligned}$$

Le deuxième problème est bien un problème de reconstruction de matrice de bas rang.

1. On dit qu'une propriété est vérifiée par des vecteurs *génériques* si elle est vraie pour tout $(v_1, \dots, v_m) \in (\mathbb{C}^n)^m - \Gamma$, où Γ est un sous-ensemble de $(\mathbb{C}^n)^m$ de mesure de Lebesgue nulle.

1.3 Exemple 3 : synchronisation de phases

Un problème de synchronisation de phases consiste à retrouver n nombres complexes de module unité, z_1^s, \dots, z_n^s , à partir de la connaissance inexacte de $z_k^s \overline{z_l^s}$ pour tous $k, l \in \{1, \dots, n\}$, c'est-à-dire à partir de

$$C_{k,l} = z_k^s \overline{z_l^s} + w_{k,l}, \quad \forall k, l \in \{1, \dots, n\},$$

où $w_{k,l}$ est un « bruit » aléatoire.

Comme en reconstruction de phase, l'identification des z_k^s n'est envisageable qu'à phase globale près.

Remarquons que, si on avait exactement accès aux $z_k^s \overline{z_l^s}$, la reconstruction serait facile : à cause de l'ambiguïté due à la phase globale, on pourrait supposer que $z_1^s = 1$ et on aurait ensuite, pour tout $k = 2, \dots, n$,

$$z_k^s \overline{z_1^s} = z_k^s.$$

C'est l'incertitude sur les $z_k^s \overline{z_l^s}$ qui rend le problème difficile.

La synchronisation de phases peut être vue comme un problème de reconstruction de matrice de bas rang pour la même raison que la reconstruction de phase. Via le changement de variable $Z^s = z^s (z^s)^*$, le problème est en effet équivalent à

$$\begin{aligned} & \text{trouver } Z \in \text{Mat}(n, n), \\ & \text{telle que } Z_{k,l} \approx C_{k,l}, \quad \forall k, l \leq n, \\ & Z \succeq 0, \\ & \text{rang}(Z) = 1. \end{aligned}$$

Ce problème est motivé par des applications concrètes comme la synchronisation de machines dans des réseaux informatiques. Il sert aussi de modèle simplifié pour approcher le problème plus complexe consistant à identifier des rotations de \mathbb{R}^3 , R_1, \dots, R_n à partir d'estimations des $R_k R_l^{-1}$, qui apparaît notamment en microscopie cryo-électronique. On pourra consulter [Bandeira, Boumal, and Singer, 2017] pour des références précises.

2 Méthodes convexes

2.1 Difficulté de reconstruire des matrices de bas rang

On peut dire de manière caricaturale que, grâce aux travaux menés depuis des décennies dans le domaine de l'optimisation convexe, il existe des algorithmes efficaces permettant de résoudre à précision arbitraire les problèmes de la forme « minimiser $_{x \in \mathcal{E}} f(x)$ » lorsque \mathcal{E} est un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie et $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ est

également convexe. Ces algorithmes ne s'appliquent pas aux problèmes de la forme (1) car le rang n'est pas une fonction convexe.

Diverses stratégies simples, qu'on appelle *méthodes non-convexes*, existent néanmoins pour résoudre ces problèmes. La plupart sont itératives : elles partent d'une estimation initiale de la solution et tâchent de la raffiner progressivement au moyen d'heuristiques naturelles. Elles fonctionnent parfois bien mais peuvent aussi aboutir à une estimation erronée qu'elles ne parviennent plus à raffiner, une sorte d'optimum local ; on appelle ces points de stagnation des *points critiques*.

Nous reviendrons bien sûr à ces méthodes non-convexes, puisqu'elles constituent notre sujet, mais, dans les prochains paragraphes, nous allons présenter les *méthodes convexes*, une famille d'algorithmes reposant sur des idées plus sophistiquées, introduits à partir de 2010 pour contourner ce problème de points critiques.

Précisons d'abord que les problèmes de reconstruction, même approximative, de matrices de bas rang sont NP-difficiles en toute généralité [Hardt, Meka, Raghavendra, and Weitz, 2014; Fickus, Mixon, Nelson, and Wang, 2014]. On ne peut donc pas espérer trouver d'algorithme résolvant ces problèmes à coup sûr en un temps raisonnable. Nous nous contenterons de méthodes capables de résoudre de larges (les plus larges possibles) catégories de ces problèmes

2.2 Convexification

Définition 2.1. Soit $X \in \text{Mat}(n_1, n_2)$ une matrice. On note $\lambda_1(X), \dots, \lambda_{\min(n_1, n_2)}(X)$ ses valeurs singulières, c'est-à-dire les réels positifs tels que, pour certaines matrices orthogonales $U \in \text{Mat}(n_1, n_1), V \in \text{Mat}(n_2, n_2)$,

$$X = U \begin{pmatrix} \lambda_1(X) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{\min(n_1, n_2)}(X) & \\ 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix} {}^t V.$$

La norme nucléaire de X est définie par

$$\|X\|_* = \sum_{s=1}^{\min(n_1, n_2)} \lambda_s(X).$$

La norme opérateur de X est

$$\|X\| = \max_{s=1, \dots, \min(n_1, n_2)} \lambda_s(X).$$

Le principe des *méthodes convexes* est d'approximer le problème original, non-convexe, par un problème convexe, typiquement en remplaçant le rang, non-convexe, par la norme nucléaire, convexe. Ce remplacement est motivé par le fait que $\|\cdot\|_*$ est l'*enveloppe convexe* du rang sur $\{X, \|\|X\|\| \leq 1\}$: pour toute $X \in \text{Mat}(n_1, n_2)$ telle que $\|\|X\|\| \leq 1$,

$$\|X\|_* = \max\{F(X), F : \{X, \|\|X\|\| \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe}, F \leq \text{rang}\}.$$

Le problème (1)

$$\text{minimiser } \text{rang}(X) \text{ pour } X \in \mathcal{E}$$

est donc remplacé par

$$\text{minimiser } \|X\|_* \text{ pour } X \in \mathcal{E}. \quad (2)$$

Ce deuxième problème étant convexe (si \mathcal{E} est convexe), il peut être résolu numériquement. De plus, bien qu'il ne soit a priori qu'une approximation du problème initial, il arrive qu'il ait la même solution, de sorte qu'en résolvant l'approximation convexe, on résout en fait le problème non-convexe.

Cette idée a été introduite dans [Recht, Fazel, and Parrilo, 2010]. Elle fait écho à la théorie du *compressed sensing* pour la reconstruction de signaux parcimonieux (c'est-à-dire dont la plupart des coordonnées sont nulles).

2.3 Méthodes convexes pour la complétion de matrices

Des conditions sous lesquelles la solution du problème (2) est identique à celle du problème (1) ont été proposées pour tous les problèmes mentionnés dans la première section de ce document (et bien d'autres). Dans le cas de la complétion, par exemple, le problème (2) se spécialise en

$$\begin{aligned} &\text{minimiser } \|X\|_* \\ &\text{avec } X_{i,j} = X_{i,j}^s, \quad \forall (i,j) \in \Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Il a notamment été analysé dans [Candès and Recht, 2008; Candès and Tao, 2010; Gross, 2011]. La situation la plus simple dans laquelle on peut garantir que sa solution est bien X^s est résumée par le théorème suivant.

Théorème 2.2 (Chen [2015]). *Notons r le rang de X^s et μ_0 son incohérence².*

2. Définition de l'incohérence : notons $U \in \text{Mat}(n_1, r)$ (resp. $V \in \text{Mat}(n_2, r)$) une matrice dont les colonnes forment une base orthonormale de $\text{Im}(X^s)$ (resp. $\text{Im}({}^t X^s)$). Soient $U_1, \dots, U_{n_1}, V_1, \dots, V_{n_2}$ les lignes de U et V . On définit $\mu_0 = \max\left(\frac{n_1}{r} \|U_1\|^2, \dots, \frac{n_1}{r} \|U_{n_1}\|^2, \frac{n_2}{r} \|V_1\|^2, \dots, \frac{n_2}{r} \|V_{n_2}\|^2\right)$.

Supposons que l'ensemble Ω est choisi en sélectionnant chacune des $n_1 n_2$ coordonnées indépendamment avec une probabilité $p > 0$. Il existe des constantes $C, c > 0$ telles que, si

$$n_1 n_2 p \geq C \mu_0 r (n_1 + n_2) \log^2(\max(n_1, n_2)),$$

alors, avec probabilité au moins $1 - \frac{1}{\max(n_1, n_2)^c}$, la solution du problème (3) est X^s .

En d'autres termes, pourvu qu'on observe un nombre de coefficients de X^s de l'ordre de $r(n_1 + n_2)$ (en négligeant μ_0 et les facteurs logarithmiques), on peut reconstruire X^s en résolvant le problème (3), avec grande probabilité. Le nombre de degrés de liberté d'une matrice de rang r est de l'ordre de $r(n_1 + n_2)$. Notre algorithme convexe fonctionne donc avec (quasiment) la plus petite quantité d'informations possible.

2.4 Méthodes convexes pour la reconstruction de phase

Dans le cas de la reconstruction de phase, on rappelle qu'on avait affaire au problème suivant :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } X \in \text{Mat}(n, n), \\ & \text{telle que } \langle X, v_k v_k^* \rangle = |\langle x^s, v_k \rangle|^2, \quad \forall k \leq m, \\ & X \succeq 0, \\ & \text{rang}(X) = 1. \end{aligned}$$

Lui appliquer la méthode décrite dans le paragraphe précédent revient à remplacer la contrainte « $\text{rang}(X) = 1$ » par la contrainte « $\|X\|_*$ est minimale ». Pour toute $X \succeq 0$, $\|X\|_* = \text{Tr}(X)$. Le problème auquel nous aboutissons, baptisé *PhaseLift* dans [Candès, Strohmer, and Voroninski, 2013], est donc :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } \text{Tr}(X) \\ & \text{avec } \langle X, v_k v_k^* \rangle = |\langle x^s, v_k \rangle|^2, \quad \forall k \leq m, \\ & X \succeq 0. \end{aligned} \tag{PhaseLift}$$

La plupart des garanties de correction établies pour ce problème s'appliquent au cas où on suppose les vecteurs v_1, \dots, v_m choisis aléatoirement, indépendamment, selon une loi normale :

$$v_1, \dots, v_m \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, I_n).$$

Sous cette hypothèse, la meilleure garantie possible est la suivante, obtenue dans [Candès and Li, 2014].

Théorème 2.3. *Il existe des constantes $C, c > 0$ telles que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $m \geq Cn$, avec probabilité au moins $1 - e^{-cm}$, la solution \hat{X} du problème (**PhaseLift**) vérifie*

$$\hat{X} = x^s(x^s)^*$$

pour tout $x^s \in \mathbb{C}^n$.

Puisqu'il faut de toute façon au moins $m \geq n$ vecteurs de mesure³ pour que x^s soit uniquement déterminé par $|\langle x^s, v_1 \rangle|, \dots, |\langle x^s, v_m \rangle|$ à phase globale près, ce théorème nous dit que *PhaseLift* est capable de résoudre des problèmes de reconstruction de phase avec un nombre de mesures optimal à constante multiplicative près.

Schéma de démonstration, adapté de [Chen, Chi, and Goldsmith, 2015]. Définissons

$$\mathcal{A} : X \in \text{Herm}(n, n) \rightarrow (\langle X, v_k v_k^* \rangle)_{k=1, \dots, m} \in \mathbb{R}^m.$$

Pour des raisons techniques, on définit également

$$\tilde{\mathcal{A}} : X \in \text{Herm}(n, n) \rightarrow (\mathcal{A}(X)_1 - \mathcal{A}(X)_2, \mathcal{A}(X)_3 - \mathcal{A}(X)_4, \dots) \in \mathbb{R}^{\lfloor m/2 \rfloor}.$$

(On peut lire la suite du schéma en s'imaginant que $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.)

Proposition 2.4. *Il existe $c, C, d, D > 0$ telles que, pour tout $r \in \{1, \dots, n\}$, la propriété suivante est vraie : si $m \geq Cnr$, alors, avec probabilité au moins $1 - e^{-cm}$,*

$$d \|X\|_F \leq \frac{1}{m} \|\tilde{\mathcal{A}}(X)\|_{\ell^1} \leq D \|X\|_F \quad (\text{RIP})$$

pour toutes les matrices $X \in \text{Herm}(n, n)$ de rang inférieur ou égal à r .

(On définit la norme de Frobenius par $\|X\|_F = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |X_{i,j}|^2 \right)^{1/2}$.)

On dit que $\tilde{\mathcal{A}}$ vérifie une *propriété d'isométrie restreinte* dans les normes ℓ^1 /Frobenius (notion à nouveau réminiscente du *compressed sensing*). Lorsqu'elle est vérifiée, cette propriété entraîne que $X = x^s(x^s)^*$ est l'unique solution du problème (**PhaseLift**). En effet, si on note \hat{X} la solution, on doit avoir

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{X}) &\leq \text{Tr}(x^s(x^s)^*), \\ \langle \hat{X}, v_k v_k^* \rangle &= |\langle x^s, v_k \rangle|^2 = \langle x^s(x^s)^*, v_k v_k^* \rangle, \quad \forall k = 1, \dots, m, \\ \hat{X} &\succeq 0, \end{aligned}$$

3. en fait, il faut $m \geq 4n - o(n)$

ce qui, en définissant $H = \hat{X} - x^s(x^s)^*$, entraîne

$$\text{Tr}(H) \leq 0, \quad (4a)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(H) = 0, \quad (4b)$$

$$x^s(x^s)^* + H \succeq 0. \quad (4c)$$

La proposition suivante permet de conclure.

Proposition 2.5. *Si l'égalité (RIP) est satisfaite pour un certain $r > \frac{4D^2}{d^2} + 2$, alors, quel que soit x^s , il n'existe pas $H \in \text{Mat}(n, n)$ non-nulle vérifiant les propriétés (4a), (4b) et (4c).*

Une explication extrêmement vague de cette proposition est de dire que, si H est telle que $\text{Tr}(H) \leq 0$ et $x^s(x^s)^* + H \succeq 0$, alors H est « relativement proche de $-\lambda x^s(x^s)^*$ » pour un certain $\lambda > 0$. Ainsi, même si H n'est pas exactement de rang r , on peut lui appliquer la propriété (RIP) et montrer que

$$\|\tilde{\mathcal{A}}(H)\|_{\ell^1} \geq d' \|H\|_F$$

pour une certaine constante $d' > 0$. L'égalité $\tilde{\mathcal{A}}(H) = 0$ entraîne donc $H = 0$. □

Beaucoup d'extensions de ce résultat sont possibles : on peut analyser la stabilité au bruit de (PhaseLift), considérer d'autres distributions aléatoires pour les vecteurs de mesure qu'une loi normale, se demander comment exploiter des hypothèses supplémentaires qu'on pourrait avoir sur x^s ...

On peut aussi concevoir d'autres méthodes convexes que (PhaseLift). En particulier, de manière surprenante, on peut montrer que la présence de la trace n'est pas indispensable : le problème

$$\begin{aligned} & \text{trouver } X \in \text{Mat}(n, n) \\ & \text{tel que } \langle X, v_k v_k^* \rangle = |\langle x^s, v_k \rangle|^2, \quad \forall k \leq m, \\ & X \succeq 0. \end{aligned} \quad (\text{Weak-PhaseLift})$$

vérifie essentiellement le même théorème de correction que celui que nous avons énoncé pour (PhaseLift) [Demanet and Hand, 2012]. À l'aide d'un changement de variable particulier, on peut transformer (Weak-PhaseLift) en un autre problème, dénommé *PhaseCut*,

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } \text{Tr}(MU) \\ & \text{avec } U \in \text{Mat}(m, m), \\ & U_{k,k} = 1, \quad \forall k \leq m, \\ & U \succeq 0, \end{aligned} \quad (\text{PhaseCut})$$

pour une matrice M explicite, dépendant des v_k et $|\langle x^s, v_k \rangle|$. Cette formulation a certains avantages algorithmiques sur (**PhaseLift**) et paraît également, dans certains cas, plus stable aux éventuelles incertitudes sur les $|\langle x^s, v_k \rangle|$ [**Waldspurger, d’Aspremont, and Mallat, 2015**].

2.5 Limites des méthodes convexes

Pour résumer, les méthodes convexes permettent de résoudre des problèmes de reconstruction de matrices de bas rang sous des hypothèses statistiques essentiellement optimales. Leurs aspects algorithmiques sont relativement bien compris ; de nombreux algorithmes existent pour résoudre numériquement les problèmes de la forme (2).

Cette description à première vue idyllique doit néanmoins être nuancée : les approches convexes souffrent d’un « problème de dimensionnalité » intrinsèque, qui limite beaucoup l’efficacité des algorithmes de résolution et, par conséquent, l’intérêt pratique de ces approches. En effet, une matrice $X^s \in \text{Mat}(n_1, n_2)$ de rang r peut s’écrire sous la forme

$$X^s = U^t V$$

avec $U \in \text{Mat}(n_1, r)$, $V \in \text{Mat}(n_2, r)$. Lorsque le rang r est connu, le nombre de « degrés de liberté » du problème est donc de l’ordre de $(n_1 + n_2)r$ ⁴. Néanmoins, comme les méthodes convexes reconstruisent directement chacun des $n_1 n_2$ coefficients de X^s , les algorithmes associés ont tendance à avoir des complexités polynomiales en $n_1 n_2$, bien supérieures donc à la complexité qu’on aurait idéalement pu espérer :

$$n_1 n_2 \gg (n_1 + n_2)r.$$

Citons deux exemples d’algorithmes pour illustrer ce phénomène.

1. Les méthodes de point intérieur : ces méthodes permettent de résoudre les problèmes de la forme

$$\begin{aligned} &\text{minimiser } \text{Tr}(X), \\ &\text{avec } \mathcal{A}(X) = 0, \\ &X \succeq 0, \end{aligned}$$

où $\mathcal{A} : \text{Herm}(n, n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application affine, ce qui inclut la plupart des problèmes de minimisation de norme nucléaire (lorsque \mathcal{E} est affine, ils peuvent être réécrits de cette manière, avec $n = n_1 + n_2$, si on introduit des variables supplémentaires, judicieusement choisies). Elles sont itératives. Le nombre d’itérations nécessaires pour atteindre une

4. légèrement moins, puisque plusieurs paires (U, V) différentes peuvent définir la même matrice X^s

précision fixée est en principe modéré mais, en toute généralité, le nombre d'opérations arithmétiques élémentaires à effectuer à chaque itération [Borchers and Young, 2007, Page 357] est de l'ordre de

$$(m + n)mn^2.$$

2. FISTA [Beck and Teboulle, 2009] : cet algorithme résout approximativement les problèmes de la forme (2) quand \mathcal{E} est affine en les remplaçant par une version « régularisée » :

$$\underset{X \in \text{Mat}(n_1, n_2)}{\text{minimiser}} \frac{1}{2} \|\mathcal{A}(X)\|^2 + \lambda \|X\|_*,$$

avec $\mathcal{A} : \text{Mat}(n_1, n_2) \rightarrow \mathbb{R}^m$ l'opérateur affine tel que $\mathcal{E} = \{X, \mathcal{A}(X) = 0\}$ et $\lambda > 0$ un paramètre à choisir. C'est également un algorithme itératif, qui nécessite davantage d'itérations qu'une méthode de point intérieur. Chaque itération consiste en une étape de descente de gradient sur l'opérateur $X \rightarrow \|\mathcal{A}(X)\|^2$ et une application de l'« opérateur proximal » de la norme nucléaire. La partie la plus coûteuse est l'opérateur proximal. En principe (des heuristiques existent pour l'accélérer, qui exploitent la structure du problème), elle nécessite une décomposition en valeurs singulières, ce qui, si n_1 et n_2 sont du même ordre, se calcule en $O(n_1^3)$ opérations.

3 À venir

Pour remédier au problème décrit dans la sous-section précédente, une voie possible est d'améliorer encore les algorithmes disponibles pour les problèmes de la forme (2), en exploitant le mieux possible le fait que, dans le cas qui nous intéresse, leur solution est de rang faible [Ding, Yurtsever, Cevher, Tropp, and Udell, 2019; Yurtsever, Tropp, Fercoq, Udell, and Cevher, 2019].

Une autre voie est de revenir aux méthodes non-convexes, qu'il s'agisse des heuristiques mentionnées dans la sous-section 2.1, préexistantes aux méthodes convexes, ou d'algorithmes nouveaux mais de principe similaire. Comprendre précisément quand elles fonctionnent et quand elles échouent reste pour l'instant hors de portée. De nombreux travaux ont toutefois permis, ces dernières années, de déterminer au moins un certain nombre de situations où non seulement les méthodes non-convexes fonctionnent, mais on peut en outre le démontrer rigoureusement.

Le but du cours est de donner un aperçu de ces situations et des techniques de preuve utilisées pour établir des garanties de correction. Il sera divisé en trois séances, correspondant à peu près à trois techniques différentes et, plus spécifiquement, à trois façons différentes d'affronter le problème des points critiques.

- Dans la séance du 5 novembre, nous décrirons des problèmes de reconstruction de matrices de bas rang spécifiques et des algorithmes, spécifiques aussi, pour lesquels on observe et on peut démontrer qu'il n'existe pas de point critique, ce qui suffit à garantir le bon fonctionnement des algorithmes.

- Dans la séance du 12 novembre, nous verrons des problèmes et algorithmes pour lesquels, au contraire, il existe des points critiques et montrer que les algorithmes fonctionnent bien nécessite de montrer qu'ils évitent ces points critiques. Nous décrirons une méthode récente permettant cela dans certains cas, le *tous-sauf-un* (*leave-one-out* en anglais).
- Le 19 novembre, au contraire des deux séances précédentes, nous n'étudierons pas des problèmes et algorithmes spécifiques mais toute une famille d'algorithmes non-convexes, les *méthodes de Burer-Monteiro*, pouvant être appliqués à une assez large classe de problèmes de reconstruction de matrices de bas rang. Nous expliquerons pour lesquels de ces algorithmes il est possible, sans faire d'hypothèse sur le problème auquel on les applique, de montrer la non-existence de points critique (et donc le succès de la reconstruction).

Si nous limiterons notre étude aux problèmes de reconstruction de matrices de bas rang, précisons malgré tout qu'il est apparu ces dernières années, en particulier avec l'avènement de l'apprentissage profond, que beaucoup de problèmes non-convexes, à première vue extrêmement difficiles, pouvaient être résolus au moyen d'algorithmes relativement simples. Cela fournit une motivation supplémentaire pour essayer de comprendre le fonctionnement d'algorithmes non-convexes dans notre cas particulier : les méthodes d'analyse développées pour ce cas pourraient peut-être s'appliquer par la suite à d'autres situations intéressantes.

4 Références

- R. Balan, B. G. Bodmann, P. G. Casazza, and D. Edidin. Painless reconstruction from magnitudes of frame coefficients. Journal of Fourier Analysis and Applications, 15(4) :488–501, 2009.
- A. S. Bandeira, N. Boumal, and A. Singer. Tightness of the maximum likelihood semidefinite relaxation for angular synchronization. Mathematical Programming, 163(1-2) :145–167, 2017.
- A. Beck and M. Teboulle. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. SIAM journal on imaging sciences, 2(1) :183–202, 2009.
- B. Borchers and J. Young. Implementation of a primal–dual method for SDP on a shared memory parallel architecture. Computational Optimization and Applications, 37(3) :355–369, 2007.
- E. J. Candès and X. Li. Solving quadratic equations via phaselift when there are about as many equations as unknowns. Foundations of Computational Mathematics, 14(5) :1017–1026, 2014.
- E. J. Candès and B. Recht. Exact matrix completion via convex optimization. Foundations of Computational Mathematics, 9(6) :717–772, 2008.

- E. J. Candès, T. Strohmer, and V. Voroninski. Phaselift : exact and stable signal recovery from magnitude measurements via convex programming. Communications in Pure and Applied Mathematics, 66(8) :1241–1274, 2013.
- E. J. Candès and T. Tao. The power of convex relaxation : Near-optimal matrix completion. IEEE Transactions on Information Theory, 56(5) :2053–2080, 2010.
- A. Chai, M. Moscoso, and G. Papanicolaou. Array imaging using intensity-only measurements. Inverse Problems, 27(1), 2011.
- Y. Chen. Incoherence-optimal matrix completion. IEEE Transactions on Information Theory, 61(5) :2909–2923, 2015.
- Y. Chen and Y. Chi. Harnessing structures in big data via guaranteed low-rank matrix estimation : Recent theory and fast algorithms via convex and nonconvex optimization. IEEE Signal Processing Magazine, 35(4) :14–31, 2018.
- Y. Chen, Y. Chi, and A. Goldsmith. Exact and stable covariance estimation from quadratic sampling via convex programming. IEEE Transactions on Information Theory, 61(7) :4034–4059, 2015.
- M. A. Davenport and J. Romberg. An overview of low-rank matrix recovery from incomplete observations. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 10(4) :608–622, 2016.
- L. Demanet and P. Hand. Stable optimizationless recovery from phaseless linear measurements. Journal of Fourier Analysis and Applications, 20(1) :199–221, 2012.
- L. Ding, A. Yurtsever, V. Cevher, J. A. Tropp, and M. Udell. An optimal-storage approach to semidefinite programming using approximate complementarity. preprint, 2019. <https://arxiv.org/abs/1902.03373>.
- M. Fickus, D. G. Mixon, A. A. Nelson, and Y. Wang. Phase retrieval from very few measurements. Linear Algebra and its Applications, 449 :475–499, 2014.
- D. Gross. Recovering low-rank matrices from few coefficients in any basis. IEEE Transactions on Information Theory, 57(3) :1548–1566, 2011.
- M. Hardt, R. Meka, P. Raghavendra, and B. Weitz. Computational limits for matrix completion. In Conference on Learning Theory, pages 703–725, 2014.
- B. Recht, M. Fazel, and P. A. Parrilo. Guaranteed minimum-rank solutions of linear matrix equations via nuclear norm minimization. SIAM Review, 52(3) :471–501, 2010.

- Y. Schechtman, Y. C. Eldar, O. Cohen, H. N. Chapman, J. Miao, and M. Segev. Phase retrieval with application to optical imaging : a contemporary overview. IEEE Signal processing magazine, 32(3) :87–109, 2015.
- I. Waldspurger, A. d’Aspremont, and S. Mallat. Phase recovery, maxcut and complex semidefinite programming. Mathematical Programming, 149(1-2) :47–81, 2015.
- A. Yurtsever, J. A. Tropp, O. Fercoq, M. Udell, and V. Cevher. Scalable semidefinite programming. preprint, 2019. <https://arxiv.org/abs/1912.02949>.