Université Pierre et Marie Curie
LM110

Le 4 octobre 2012
http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM110.html

TD : Fonctions

Rappels :

$$\cos(0)=1 \qquad \cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2} \qquad \cos(\frac{\pi}{2})=0$$

$$\sin(0)=0 \qquad \sin(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2} \qquad \sin(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin(\frac{\pi}{2})=1$$

$$\cos(-x)=\cos(x) \qquad \cos(x+\pi)=-\cos(x) \qquad \cos(x+2\pi)=\cos(x)$$

$$\cos(x+\frac{\pi}{2})=-\sin(x) \qquad \cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(x) \qquad \cos(\pi-x)=-\cos(x)$$

$$\sin(-x)=-\sin(x) \qquad \sin(x+\pi)=-\sin(x) \qquad \sin(x+2\pi)=\sin(x)$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos(x) \qquad \sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(x) \qquad \sin(\pi-x)=\sin(x)$$

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) \qquad \cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b) \qquad \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a)=\cos(b) \text{ si et seulement si } a\equiv b[2\pi] \text{ ou } a\equiv -b[2\pi]$$

$$\sin(a)=\sin(b) \text{ si et seulement si } a\equiv b[2\pi] \text{ ou } a\equiv \pi-b[2\pi]$$

Exercice 1 :

Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes. Tracer approximativement leur graphe et préciser sur ces graphes les valeurs ou limites aux points indiqués.

$f_1 : x \to \|x\|$	Points : $-\infty, -1, 0, 1, +\infty$
$f_2 : x \to \sqrt{x}$	Points : $0, 1, +\infty$
$f_3 : x \to e^x$	Points : $-\infty, 0, +\infty$
$f_4 : x \to \ln(x)$	Points : $0, 1, e, +\infty$
$f_5 : x \to \tan(x)$	Points : $-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$

Exercice 2 : [Révisions sur les sinus et cosinus]

Les questions sont indépendantes.

1. Donner une démonstration géométrique du fait que $\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

a) Montrer qu'il existe un unique $c\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ tel que $\alpha=\tan(c)$.

b) Montrer que, pour tout x, $\alpha=\tan(x)$ si et seulement si $\sin(x-c)=0$.

c) Montrer que $\alpha = \tan(x)$ si et seulement si $c \equiv x[\pi]$.

3. Posons $x = \cos(\frac{2\pi}{5})$.
a) Calculer $\cos(\frac{4\pi}{5})$ en fonction de x.
b) Calculer $\cos(\frac{6\pi}{5})$ en fonction de x.
c) Montrer que $\cos(\frac{4\pi}{5}) = \cos(\frac{6\pi}{5})$ et en déduire la valeur de x.

Exercice 3 : [Examen 2010]

1. Énoncer le théorème de Rolle, en donnant précisément les hypothèses et la conclusion.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \to f(x) = (x^2+1)\sin x$.
a) Calculer la dérivée de f.
b) Montrer, de deux façons, que l'équation $(x^2+1)\cos x + 2x\sin x = 0$ admet une solution dans $[0;\pi]$:
- soit en appliquant le théorème de Rolle sur $[0;\pi]$ à une fonction bien choisie
- soit en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur $[0;\pi]$ à une fonction bien choisie.

Exercice 4 :

En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer les inégalités suivantes :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |\sin x - \sin y| \leq |x-y|$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |\arctan x - \arctan y| \leq |x-y|$$
$$\forall x \geq 0, \frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x$$

Exercice 5 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue dont la dérivée f' est continue, dérivable et de dérivée f'' continue (on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$).

1. Pour les questions 1. à 4., on fixe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$.
Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + (b-x)f'(x) - f(b)$. Montrer que $g(b) = 0$, que g est continue et dérivable. Calculer g'.

2. Posons $h(x) = g(x) - \frac{g(a)}{(b-a)^2}(b-x)^2$. Montrer que $h(a) = h(b) = 0$, que h est continue et dérivable. Calculer h'.

3. Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ (ou $]b;a[$ si $b < a$) tel que $h'(c) = 0$.

4. Montrer que $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c)$.

5. À partir de maintenant, on suppose que $f(0) = 0$. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $F(x) = \frac{f(x)}{x}$. Montrer que F se prolonge par continuité en 0. Par quelle valeur se prolonge-t-elle ?

6. Montrer, en utilisant les questions 3. et 4. pour des réels a et b bien choisis que, pour tout $x \neq 0$, il existe $y_x \in]0;x[$ (ou $]x;0[$ si $x < 0$) tel que $f(x) = xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(y_x)$.

7. En déduire que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = \frac{f''(0)}{2}$.

8. Application : montrer que la fonction $x \to \frac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité en 0 et que la fonction ainsi prolongée est dérivable sur tout $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée.

Exercice 6 : [Théorème des valeurs intermédiaires pour les dérivées, plus difficile]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable. Sa dérivée n'est pas nécessairement continue mais nous allons montrer que f' vérifie tout de même le théorème des valeurs intermédiaires.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On suppose que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On suppose que $f'(a) < f'(b)$. Soit $\alpha \in]f'(a); f'(b)[$. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\alpha = f'(c)$.

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On suppose que $f'(a) > f'(b)$. Soit $\alpha \in]f'(b); f'(a)[$. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\alpha = f'(c)$.

4. (Question supplémentaire) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue quelconque. Montrer que $f' + g$ vérifie également le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 7 :

Déterminer toutes les fonctions continues et dérivables à images dans $\mathbb{R}$ satisfaisant les équations suivantes.

$$\begin{array}{lll}
1- & f'(x) = (\frac{1}{x} + 2x)f(x) & (\text{ sur } \mathbb{R}_+^*) \\
2- & f'(x) = 2f(x) - e^x & \\
3- & xf'(x) = 3f(x) + 2x & (\text{ sur } \mathbb{R}_+^*) \\
4- & f'(x) = -\tan(x)f(x) + \cos(x) & (\text{ sur }]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[) \\
5- & f''(x) = 6f'(x) - 5f(x) & \\
6- & f''(x) + 6f'(x) + 10f(x) = 0 & \\
7- & f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = 0 &
\end{array}$$

Question supplémentaire pour les équations 1, 3 et 4 : déterminer toutes les fonctions continues et dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant l'équation en chaque point où cette équation est définie.

Exercice 8 : [Examen 2005]

1. Trouver le domaine de définition et calculer la dérivée de la fonction $x \to \ln \frac{1+x}{1-x}$.

2. Trouver une fonction non-nulle z définie sur l'intervalle $]-1; 1[$ et qui est solution de l'équation différentielle $(1 - x^2)z' = 2z$.

3. Trouver les solutions sur $]-1; 1[$ de l'équation différentielle $(1 - x^2)y' - 2y = \frac{(1+x)^2}{1+x^2}$. On pourra poser $y(x) = c(x)z(x)$ où z est la solution trouvée en 2.

4. Pour quelle valeur de la constante la solution trouvée est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

Exercice 9 : [Lemme de Grönwall, plus difficile]

Soient A, B des réels strictement positifs.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = B \int_0^x f(s)ds + A$. Calculer f.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq B \int_0^x f(s)ds + A$. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq Ae^{Bx}$.
[Indication : Poser $g(x) = e^{-Bx} \int_0^x f(s)ds$ et calculer g'.]