Université Pierre et Marie Curie
LM110

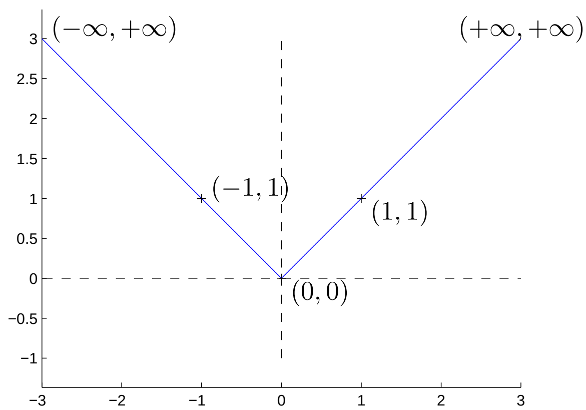
Le 4 octobre 2012

# TD : Fonctions

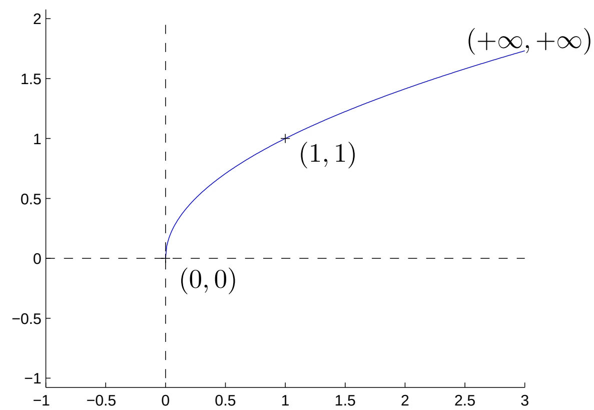
## Corrigé

**Exercice 1 :**

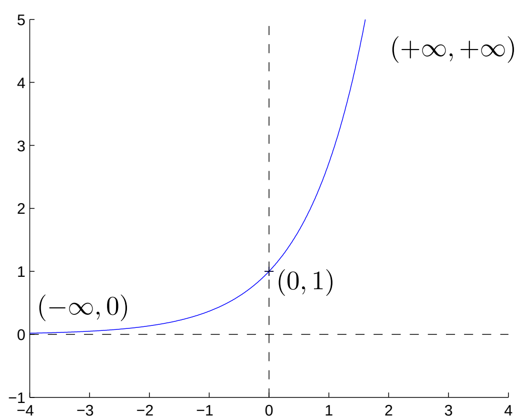
$f_1$ : définie sur $\mathbb{R}$



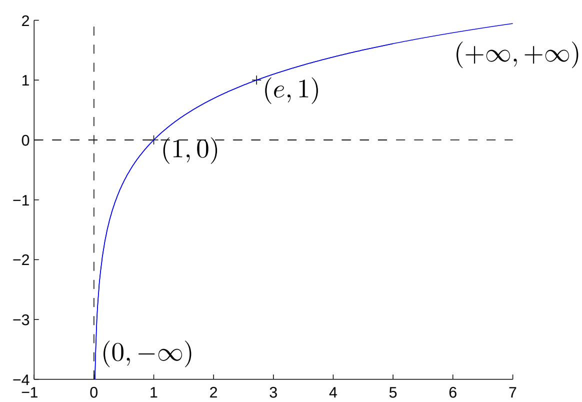

$f_2$ : définie sur $\mathbb{R}^+$



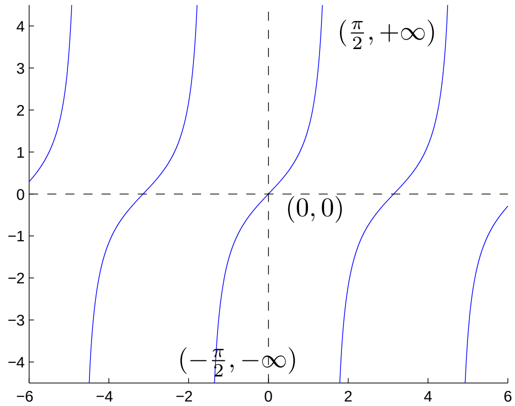

$f_3$ : définie sur $\mathbb{R}$



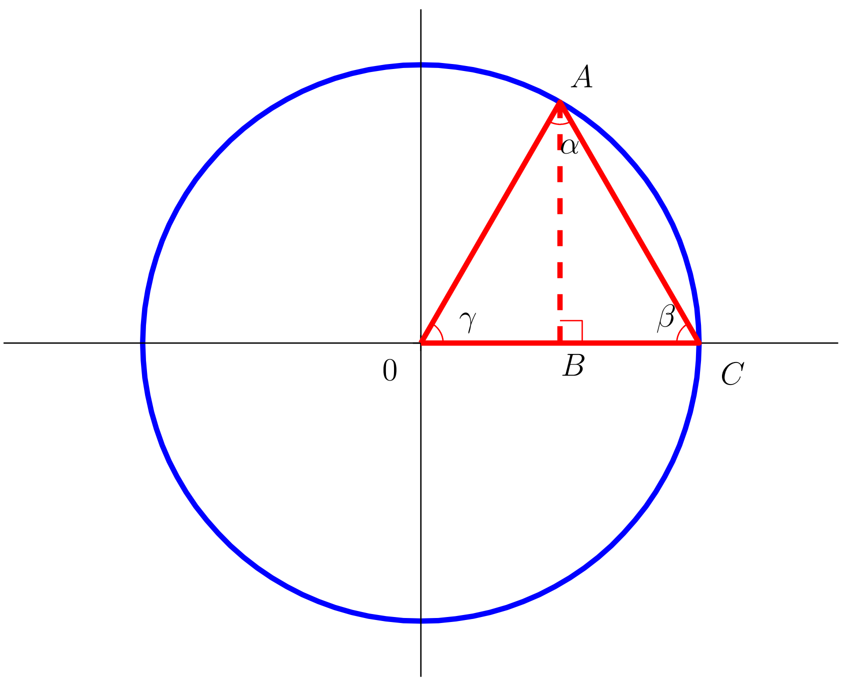

$f_4$ : définie sur $\mathbb{R}_+^*$



$f_5$ : définie sur $\mathbb{R} - \{x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]\}$




**Exercice 2 :**




1. On utilise les notations de la figure ci-contre, pour $\gamma = \frac{\pi}{3}$.
Le cercle bleu est le cercle trigonométrique. Il est de rayon 1 donc les segments $0A$ et $0C$ sont de longueur 1. Le triangle $A0C$ est donc isocèle en 0. Puisqu'il est isocèle, $\alpha = \beta$. De plus, $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ donc $2\alpha + \gamma = \pi$ et $\alpha = \beta = (\pi - \gamma)/2 = \pi/3$. Donc $\alpha = \beta = \gamma$ et le triangle $0AC$ est équilatéral.

Puisque $A0C$ est équilatéral, la hauteur $AB$ est également la médiatrice du segment $[0C]$. Donc les longueurs $0C$ et $BC$ sont égales. Puisque $0C + BC = 0C = 1$, $0B = BC = 1/2$. Or $0B = \cos(\gamma) \times 0A = \cos(\pi/3)$ donc $\cos(\pi/3) = 1/2$.
D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = 0A^2 - 0B^2 = 1 - (1/2)^2 = 3/4$ donc $AB = \sqrt{3/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. a) La fonction tan est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Puisqu'elle est continue, elle réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers $]\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan(x); \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x)[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.
Puisque $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $c \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ tel que $\alpha = \tan(c)$ (c'est une conséquence du fait que tan est surjective sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$). De plus, ce $\alpha$ est unique (c'est une conséquence du fait que tan est injective sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$).

b)

$$\begin{aligned}
\alpha = \tan(x) &\Leftrightarrow \tan(c) = \tan(x) \\
&\Leftrightarrow \frac{\sin(c)}{\cos(c)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
&\Leftrightarrow \sin(c)\cos(x) = \sin(x)\cos(c) \\
&\Leftrightarrow \sin(x)\cos(c) - \sin(c)\cos(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(x-c) = 0
\end{aligned}$$

c) D'après la question b), $\alpha = \tan(x)$ si et seulement si $\sin(x-c) = 0$. Or $\sin(x-c) = 0$ si et seulement si $\sin(x-c) = \sin(0)$ c'est-à-dire, d'après la dernière formule des rappels, si et seulement si $x - c \equiv 0[2\pi]$ ou $x - c \equiv \pi[2\pi]$, c'est-à-dire si et seulement si $x - c \equiv 0[\pi]$, soit si et seulement si $x \equiv c[\pi]$.

**Exercice 3 :**

1. Hypothèses : $a, b \in \mathbb{R}$ sont des réels tels que $a < b$ ; $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$, telle que $f(a) = f(b)$.
Conclusion : il existe $c \in ]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.
Remarque : la formulation donnée dans votre cours est peut-être légèrement différente ...
2. a) $f'(x) = (x^2+1)\cos(x) + 2x\sin(x)$
b) - Par le théorème de Rolle : $f(0) = 0 = f(\pi)$ (puisque $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$). D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in ]0;\pi[$ tel que $(c^2+1)\cos(c) + 2c\sin(c) = f'(c) = 0$. Le réel $c$ est solution de l'équation donc l'équation admet une solution.
- Par le théorème des valeurs intermédiaires : posons $g(x) = (x^2+1)\cos x + 2x\sin x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $g$ est continue. De plus, $g(0) = 1 > 0 > -(\pi^2+1) = g(\pi)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in ]0;\pi[$ tel que $g(c) = 0$. Ce $c$ est bien une solution de l'équation : $0 = g(c) = (c^2+1)\cos c + 2c\sin c$.

**Exercice 4 :**

1. Premier cas : $x = y$. Dans ce cas, l'inégalité est vraie car $0 \leq 0$.
Deuxième cas : $x \neq y$. Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction sin et à l'intervalle $[x, y]$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in [x, y]$ tel que :

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \sin'(c) = \cos(c)$$

En particulier :

$$\left|\frac{\sin x - \sin y}{x - y}\right| = |\cos(c)| \leq 1$$

Puisque $|x - y| \geq 0$, on peut multiplier les deux côtés de l'inégalité par $|x - y|$ et on obtien :

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

2. Premier cas : $x = y$. Dans ce cas, l'inégalité est vraie car $0 \leq 0$.

Deuxième cas : $x \neq y$. Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction arctan et à l'intervalle $[x, y]$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in [x, y]$ tel que :

$$\frac{\arctan x - \arctan y}{x - y} = \arctan'(c) = \frac{1}{1 + c^2}$$

En particulier :

$$\left|\frac{\arctan x - \arctan y}{x - y}\right| = \frac{1}{1 + c^2} \leq 1$$

Puisque $|x - y| \geq 0$, on peut multiplier les deux côtés de l'inégalité par $|x - y|$ et on obtien :

$$|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$$

3. Premier cas : $x = 0$. Dans ce cas, l'inégalité est vraie car $0 \leq 0 \leq 0$.
Deuxième cas : $x > 0$. Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction ln et à l'intervalle $[1, x + 1]$. D'après ce théorème, il existe $c \in [1; 1 + x]$ tel que :

$$\frac{\ln(x + 1) - \ln(1)}{(x + 1) - 1} = \ln'(c) = \frac{1}{c}$$

En simplifiant le membre de gauche, on obtient :

$$\frac{\ln(x + 1)}{x} = \frac{1}{c}$$

La fonction $a \to \frac{1}{a}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $c \in [1; 1 + x]$, on a donc :

$$\frac{1}{1 + x} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{1} = 1$$

Donc :

$$\frac{1}{1 + x} \leq \frac{\ln(x + 1)}{x} \leq 1$$

Puisque $x > 0$, on peut multiplier les inégalités par $x$ :

$$\frac{x}{1 + x} \leq \ln(x + 1) \leq x$$

**Exercice 5 :**

1. $g(b) = f(b) + 0 \times f'(b) - f(b) = 0$
La fonction $x \to (b - x)f'(x)$ est continue et dérivable car c'est un produit de deux fonctions continues et dérivables. Puisque $f$ et $x \to f(b)$ sont également continues et dérivables, la fonction $g$, qui est la somme des trois fonctions précédentes, est continue et dérivable.
$g'(x) = f'(x) + (b - x)f''(x) - f'(x) = (b - x)f''(x)$
2. $h(a) = g(a) - g(a)\frac{(b-a)^2}{(b-a)^2} = 0$
$h(b) = g(b) - 0 = 0$

La fonction $x \to -\frac{g(a)}{(b-a)^2}(b-x)^2$ est continue et dérivable (c'est le produit par une constante d'une fonction continue et dérivable, $x \to (b-x)^2$). Puisque $g$ est également continue et dérivable, $h$ aussi.
$h'(x) = g'(x) + 2\frac{g(a)}{(b-a)^2}(b-x) = (f''(x) + 2\frac{g(a)}{(b-a)^2})(b-x)$
3. Puisque $h(a) = h(b) = 0$ et puisque $h$ est continue et dérivable, d'après le lemme de Rolle, il existe $c \in ]a;b[$ tel que $h'(c) = 0$.
4. Puisque $h'(c) = 0$, $(f''(c) + 2\frac{g(a)}{(b-a)^2})(b-c) = 0$. Or $c \neq b$ donc :

$$\begin{aligned} f''(c) + 2\frac{g(a)}{(b-a)^2} &= 0 \\ \Longrightarrow f''(c) + 2\frac{f(a)+(b-a)f'(a)-f(b)}{(b-a)^2} &= 0 \\ \Longrightarrow f''(c)\frac{(b-a)^2}{2} + f(a) + (b-a)f'(a) - f(b) &= 0 \\ \Longrightarrow f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c) \end{aligned}$$

5. Pour tout $x \neq 0$, $F(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ donc $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$ et la fonction $F$ se prolonge par continuité en 0, par la valeur $f'(0)$.
6. Prenons $a = 0$ et $b = x$. D'après les questions 3. et 4., il existe $y_x \in ]0;x[$ tel que $f(x) = f(0) + (x-0)f'(0) + \frac{(x-0)^2}{2}f''(y_x) = xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(y_x)$.
7. Pour tout $x$, $F(x) - F(0) = \frac{xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(y_x)}{x} - f'(0) = \frac{x}{2}f''(y_x)$. Lorsque $x \to 0$, $y_x \to 0$ (puisque $-|x| < y_x < |x|$) donc, comme $f''$ est continue :

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f''(y_x)}{2} = \frac{f''(0)}{2}$$

La fonction $F$ est donc dérivable en 0, de dérivée $F'(0) = \frac{f''(0)}{2}$.
8. La fonction sin est continue. Sa dérivée cos est continue, dérivable et de dérivée $-\sin$ continue. De plus, $\sin(0) = 0$. On peut donc appliquer les résultats des questions précédentes : $x \to \frac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité en 0, par $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, est dérivable en 0 de dérivée $\frac{-\sin(0)}{2} = 0$. En $x \neq 0$, $F'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

**Exercice 6 :**

1. Utilisons le théorème du fermé borné : puisque $f$ est continue sur $[a;b]$, l'image de $[a;b]$ est un fermé borné, ce qui implique que $f$ atteint son minimum sur $[a;b]$ (il s'agit du même argument que dans la démonstration du théorème de Rolle). Soit $m$ le minimum de $f$ et soit $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = m$.
Montrons que $c \neq a, b$.
Supposons par l'absurde que $c = a$. Alors $m = f(c) = f(a)$. Puisque $m$ est le minimum de $f$ sur $[a;b]$, $f(x) \geq m$ pour tout $x \in [a;b]$. En particulier, pour tout $x \in ]a;b]$ :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq \frac{m-f(a)}{x-a} = 0$$

Donc :

$$0 > f'(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq \lim_{x\to a^+} 0 = 0$$

C'est absurde donc $c \neq a$.
On démontre de la même façon que $c \neq a$.
Il existe donc $c \in ]a;b[$ tel que $f(c) = m$. La fonction $f$ atteint donc un minimum local en $c$ et, de la même façon que dans la démonstration du théorème de Rolle, $f'(c) = 0$.

2. Posons $h(x) = f(x) - \alpha x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $h$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $h'(a) = f'(a) - \alpha < 0$ et $h'(b) = f'(b) - \alpha > 0$. D'après la première question, il existe $c \in ]a;b[$ tel que $h'(c) = 0$. Puisque $h'(c) = f'(c) - \alpha$, $f'(c) = \alpha$.

3. On applique le résultat de la question 2. à $(-f)$ : soit $h(x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $h$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = -f'(x)$. Ainsi, $h'(a) = -f'(a) < -\alpha < -f'(b) = h'(b)$. D'après la question 2., il existe $c \in ]a;b[$ tel que $h'(c) = -\alpha$. Pour ce $c$, $f'(c) = -h'(c) = \alpha$.

4. Soit $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $G$ est continue, dérivable et de dérivée $G' = g$. Alors $f' + g = (f+G)'$. D'après les questions précédentes, toute fonction dérivée d'une fonction continue vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. Donc, puisque $f' + g$ est la dérivée de $f + G$, cette fonction vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

**Exercice 7 :**

1 - Une primitive de $\frac{1}{x} + 2x$ est $\ln(x) + x^2$. Les solutions sont donc les $x \to C\exp(\ln(x) + x^2) = C\exp(\ln(x))\exp(x^2) = Cxe^{x^2}$, pour $C \in \mathbb{R}$.

2 - Les solutions de l'équation homogène sont les $x \to Ce^{2x}$. De plus, $e^x$ est une solution particulière (ici, on l'a devinée, on l'aurait aussi trouvée en utilisant la méthode de la variation de la constante). Les solutions sont donc l'ensemble des $x \to e^x + Ce^{2x}$, pour $C \in \mathbb{R}$.

3 - L'équation se récrit $f'(x) = \frac{3}{x}f(x) + 2$ pour $x > 0$. Une primitive de $x \to \frac{3}{x}$ est $3\ln(x)$ donc les solutions de l'équation homogène sont les $Ce^{3\ln(x)} = Cx^3$. Une solution particulière de l'équation différentielle est $-x$. Les solutions sont donc les $x \to -x + Cx^3$ pour $C \in \mathbb{R}$.

4 - $-\tan(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = \frac{(\cos x)'}{\cos x} = \ln(\cos x)'$ donc les solutions de l'équation homogène sont les $x \to C\exp(\ln(\cos x)) = C\cos x$.
Utilisons la méthode de variation de la constante pour déterminer une solution particulière. Cherchons une solution sous la forme $f(x) = g(x)\cos x$. L'équation devient :

$$\begin{aligned} g'(x)\cos(x) - g(x)\sin(x) &= f'(x) \\ &= -\tan(x)f(x) + \cos(x) \\ &= -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}g(x)\cos(x) + \cos(x) \\ &= -g(x)\sin(x) + \cos(x) \end{aligned}$$

soit :

$$g'(x)\cos(x) = \cos(x) \text{ ou } g'(x) = 1 (\text{sur } ]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[)$$

La fonction $g(x) = x$ donne ainsi la solution particulière $x \to x\cos x$.

Les solutions de l'équation différentielle sont les $x \to (x + C)\cos x$, pour $C \in \mathbb{R}$.

5 - Les racines du polynôme $X^2 - 6X + 5$ sont 1 et 5. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les $x \to \lambda e^x + \mu e^{5x}$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

6 - Les racines du polynôme $X^2 + 6X + 10$ sont $-3 + i$ et $-3 - i$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les $x \to (\lambda \cos x + \mu \sin x)e^{-3x}$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

7 - La seule racine du polynôme $X^2 + 4X + 4$ est $-2$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les $x \to (\lambda + \mu x)e^{-2x}$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Question supplémentaire pour l'équation 1 : Si $f$ est une fonction vérifiant l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^*$, alors, comme on l'a vu, il existe $C_+ \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = C_+ x e^{x^2}$ pour tout $x > 0$. On peut résoudre l'équation de la même façon sur $\mathbb{R}^-$ et on trouve les mêmes solutions. Il existe donc $C_- \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = C_- x e^{x^2}$ pour tout $x < 0$.
Puisque $f$ est continue, $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} C_+ x e^{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^-} C_- x e^{x^2} = 0$. De plus, puisque $f$ est dérivable :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \underset{x\to O^+}{C}{}_{+}\, e^{x^2} = C_+$$

et

$$f'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \underset{x\to O^-}{C}{}_{-}\, e^{x^2} = C_-$$

Donc $C_+ = C_-$. Si on pose $C = C_+ = C_-$, $f(x) = Cxe^{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
De plus, toutes les fonctions de la forme $x \to Cxe^{x^2}$ sont solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^*$ (car $(Cxe^{x^2})' = C(1+2x^2)e^{x^2} = (\frac{1}{x}+2x)f(x)$). Les solutions cherchées sont donc exactement les $x \to Cxe^{x^2}$.

Question supplémentaire pour l'équation 3 : De la même façon que précédemment, si $f$ est solution, il existe $C_-$ et $C_+$ des réels tels que $f(x) = C_- x^3 - x$ pour tout $x < 0$ et $f(x) = C_+ x^3 - x$ pour tout $x > 0$. Puisque $f$ est continue, $f(0) = 0$.
De plus, toutes les fonctions de la forme suivante sont solutions :

$$\begin{aligned} f(x) &= C_- x^3 - x \text{ si } x < 0 \\ &= 0 \text{ si } x = 0 \\ &= C_+ x^3 - x \text{ si } x > 0 \end{aligned}$$

pour $C_-$ et $C_+$ deux réels quelconques. En effet, les fonctions de cette forme sont continues (elles sont continues sur $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^+$ car sommes de fonctions continues et continues en 0). De plus, elles sont dérivables : sur $\mathbb{R}^*_+$ et $\mathbb{R}^*_-$, elles sont dérivables car sommes de fonctions dérivables. En 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} C_+ x^2 - 1 = -1$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} C_- x^2 - 1 = -1$$

donc $f$ est dérivable, de dérivée $f'(0) = -1$.

Comme pour la question précédente, on vérifie par le calcul que les fonctions de cette forme vérifient bien l'équation différentielle. Les solutions cherchées sont donc exactement les solutions de la forme décrite.

Question supplémentaire pour l'équation 4 : on peut résoudre l'équation sur chaque intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2}+n\pi;\frac{\pi}{2}+n\pi[$, pour $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $n$, il existe donc $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in ]-\frac{\pi}{2}+n\pi;\frac{\pi}{2}+n\pi[$, $f(x) = (x+\lambda_n)\cos x$. Par continuité en $\frac{\pi}{2}+n\pi$, $f(\frac{\pi}{2}+n\pi) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
On va montrer que tous les $\lambda_n$ sont égaux. Calculons la dérivée de $f$ en $\frac{\pi}{2}+n\pi$, pour $n \in \mathbb{Z}$ quelconque :

$$\begin{aligned}
f'(\frac{\pi}{2}+n\pi) &= \lim_{y\to(\frac{\pi}{2}+n\pi)^-} \frac{f(y)-f(\frac{\pi}{2}+n\pi)}{y-\frac{\pi}{2}+n\pi} \\
&= ((x+\lambda_n)\cos(x))'(\frac{\pi}{2}+n\pi) \\
&= \cos(\frac{\pi}{2}+n\pi) - (\frac{\pi}{2}+n\pi+\lambda_n)\sin(\frac{\pi}{2}+n\pi) \\
&= -(\frac{\pi}{2}+n\pi+\lambda_n)(-1)^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(\frac{\pi}{2}+n\pi) &= \lim_{y\to(\frac{\pi}{2}+n\pi)^+} \frac{f(y)-f(\frac{\pi}{2}+n\pi)}{y-\frac{\pi}{2}+n\pi} \\
&= ((x+\lambda_{n+1})\cos(x))'(\frac{\pi}{2}+n\pi) \\
&= \cos(\frac{\pi}{2}+n\pi) - (\frac{\pi}{2}+n\pi+\lambda_{n+1})\sin(\frac{\pi}{2}+n\pi) \\
&= -(\frac{\pi}{2}+n\pi+\lambda_{n+1})(-1)^n
\end{aligned}$$

Donc $-(\frac{\pi}{2}+n\pi+\lambda_{n+1})(-1)^n = f'(\frac{\pi}{2}+n\pi) = -(\frac{\pi}{2}+n\pi+\lambda_n)(-1)^n$. En simplifiant l'expression, on trouve que $\lambda_n = \lambda_{n+1}$.
Puisque c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ... $= \lambda_{-1} = \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = ....$ Donc tous les $\lambda_n$ sont égaux. Notons $\lambda$ l'unique valeur des $\lambda_n$. Alors la fonction $f$ vaut $f(x) = (x+\lambda)\cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : x \to (x+\lambda)\cos(x)$ est une fonction continue et dérivable, solution de l'équation différentielle (car $f'(x) = \cos(x) - (x+\lambda)\sin(x) = -\tan(x)f(x) + \cos(x)$). Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme $x \to (x+\lambda)\cos(x)$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Exercice 8 :**

1. Posons $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$ lorsque ce nombre est défini. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f$ est définie en $x$ si et

seulement si $\frac{1+x}{1-x}$ est défini et strictement positif, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}1-x\neq 0 \text{ et } \frac{1+x}{1-x}>0\\ \Leftrightarrow x\neq 1 \text{ et } 1+x>0;1-x>0 \text{ ou } 1+x<0;1-x<0\\ \Leftrightarrow x\neq 1 \text{ et } x>-1;x<1 \text{ ou } x<-1;x>1<0\\ \Leftrightarrow x\in ]-1;1[\end{aligned}$$

La fonction $f$ est donc définie sur $]-1;1[$.
Sur $]-1;1[$, $1+x>0$ et $1-x>0$ donc $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ et $f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{2}{1-x^2}$.
2. On cherche une solution de l'équation différentielle $z'=\frac{2}{1-x^2}z$. D'après la question 1., la fonction $f$ est une primitive de $x\to\frac{2}{1-x^2}$ sur $]-1;1[$. La fonction $z(x)=\exp(f(x))=\exp(\ln\frac{1+x}{1-x})=\frac{1+x}{1-x}$ est donc solution de l'équation sur $]-1;1[$.
3. Cherchons toutes les solutions de l'équation différentielle donnée. Soit $y$ une solution quelconque. Puisque $z$ ne s'annule pas sur $]-1;1[$, la fonction $c(x)=y(x)/z(x)$ est bien définie sur $]-1;1[$. Elle est continue et dérivable car c'est un quotient de fonctions continues et dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
On a :

$$y'=c'z+cz'$$

Puisque $(1-x^2)z'=2z$

$$\begin{aligned}0&=(1-x^2)y'-2y-\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\\&=(1-x^2)c'z+c(1-x^2)z'-2cz-\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\\&=(1-x^2)c'z-\frac{(1+x)^2}{1+x^2}+c((1-x^2)z'-2z)\\&=(1-x^2)c'z-\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\end{aligned}$$

Donc $c'(x)=\frac{1}{(1-x^2)z}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}=\frac{1}{(1+x)^2}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}=\arctan'(x)$.
Il existe donc $C\in\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x\in]-1;1[$, $c(x)=C+\arctan(x)$ et :

$$y(x)=c(x)z(x)=\arctan(x)\frac{1+x}{1-x}+C\frac{1+x}{1-x}$$

De plus, si $y(x)=\arctan(x)\frac{1+x}{1-x}+C\frac{1+x}{1-x}$ pour un $C\in\mathbb{R}$ quelconque, $y$ est solution de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned}(1-x^2)y'(x)&=(1-x^2)(\frac{1}{1+x^2}\frac{1+x}{1-x}+\arctan(x)\frac{2}{(1-x)^2}+\frac{2C}{(1-x)^2})\\&=\frac{(1+x)^2}{1+x^2}+2\arctan(x)\frac{1+x}{1-x}+2C\frac{1+x}{1-x}\\&=\frac{(1+x)^2}{1+x^2}+2y(x)\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc exactement les fonctions de la forme $y(x) = \arctan(x)\frac{1+x}{1-x} + C\frac{1+x}{1-x}$, pour $C \in \mathbb{R}$.

4. $y(x) = \frac{(1+x)(\arctan(x)+C)}{1-x}$. Lorsque $x \to 1$, $1-x \to 0$ donc, si $(1+x)(\arctan(x)+C)$ a une limite non-nulle, $y(x) \to \pm\infty$.

Pour qu'on puisse prolonger $y$ par continuité, il faut donc que $(1+x)(\arctan(x)+C)$ tende vers 0 en 1. La fonction $x \to (1+x)(\arctan(x)+C)$ est continue donc, en 1, cette fonction tend vers $2(\arctan(1)+C)$. Il faut donc qu'on ait $C = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$.

On vient de démontrer que, si $y$ se prolonge par continuité en 1, $C = -\frac{\pi}{4}$. Montrons maintenant la réciproque : si $C = -\frac{\pi}{4}$, $y$ se prolonge par continuité en 1.

Lorsque $x \to 1$, en revenant à la définition de la dérivée d'arctan :

$$\frac{\arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{1-x} = -\frac{\arctan(x) - \arctan(1)}{x-1} \to -\arctan'(1) = -\frac{1}{1+1^2} = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{1+x} \to \frac{1}{2}$$

Donc $y(x)$ tend vers $\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$ quand $x$ tend vers 1 et se prolonge bien par continuité en 1.

**Exercice 9 :**

1. On dérive l'expression : $f'(x) = Bf(x)$. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x$, $f(x) = ce^{Bx}$. De plus, $f(0) = B\int_0^0 f(s)ds + A = A$ donc $c = f(0) = A$. Donc $f(x) = Ae^{Bx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. On pose $g(x) = e^{-Bx}\int_0^x f(s)ds$. Alors :

$$g'(x) = -Be^{-Bx}\int_0^x f(s)ds + e^{-Bx}f(x) = e^{-Bx}(f(x) - B\int_0^x f(s)ds) \leq Ae^{-Bx}$$
$$\Rightarrow \forall x \geq 0, g(x) = g(0) + \int_0^x g'(s)ds = \int_0^x g'(s)ds \leq \int_0^x Ae^{-Bs}ds = A.\frac{1-e^{-Bx}}{B}$$

Donc
$$\int_0^x f(s)ds = e^{Bx}g(x) \leq \frac{A}{B}(e^{Bx} - 1)$$

et, pour tout $x \geq 0$ :
$$f(x) \leq B.\frac{A}{B}(e^{Bx} - 1) + A = Ae^{Bx}$$