TD : Fonctions

Exercice 1 :

Calculer les développements limités suivants à l'ordre 2 au point indiqué :

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}} & \text{en } 0 \\ f_2(x) = \exp(\cos(x)) & \text{en } 0 \\ f_3(x) = \ln(1+x^2) & \text{en } 1 \\ f_4(x) = \tan(x) & \text{en } \frac{\pi}{4} \end{array}$$

Exercice 2 : [Examen de juin 2010]

Dire, pour chacune des trois fonctions suivantes, si elle est continue en 0, si elle est dérivable en 0 et si elle admet un développement limité d'ordre 2 en 0.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ &= 0 & \text{sinon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{e^x - 1 - x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ &= 0 & \text{sinon} \end{aligned}$$

$$f_3(x) = x|x|$$

Exercice 3 :

1. Calculer, aux points où elles sont définies, les dérivées de $x \to \ln(e^x - 1)$, $x \to \ln(1 - e^x)$ et $x \to \frac{e^x}{e^x - 1}$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $f'(x)(e^x - 1) = e^x f(x) - e^x$.

3. Résoudre sur $\mathbb{R}_-^*$ l'équation $f'(x)(e^x - 1) = e^x f(x) - e^x$.

4. On cherche maintenant toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui satisfont l'équation $f'(x)(e^x - 1) = e^x f(x) - e^x$. Montrer que, si f est une telle fonction, il existe K_1 et K_2 des réels tels que :

$$\begin{aligned} f(x) &= K_1(e^x - 1) + e^x & \text{si } x > 0 \\ &= K_2(e^x - 1) + e^x & \text{si } x < 0 \end{aligned}$$

5. Que vaut f en 0 ?

6. Montrer que, si f est dérivable en 0, alors $K_1 = K_2$. En déduire l'ensemble des solutions.

Exercice 4 :
On pose, pour tous x et y réels :

$$f(x,y) = (y^2 + x)e^{x+y}$$

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Vérifier que le théorème de Schwarz est respecté.
3. Chercher en quel point f peut admettre un extremum local.
4. Effectuer un développement limité de f à l'ordre 2 au point trouvé à la question 3.
5. Ce point est-il un extremum local ? Un maximum ? Un minimum ?

Exercice 5 : [Polynômes de Tchebychev]
On définit par récurrence une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:

$$f_0(x) = 1 \qquad\qquad f_1(x) = x$$
$$f_{n+2}(x) = 2xf_{n+1}(x) - f_n(x) \text{ pour tout } n \geq 0$$

1. Calculer f_2 et f_3.
2. Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta)$.
[Indication : écrire $\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = \cos((n+1)\theta + \theta) + \cos((n+1)\theta - \theta)$ et utiliser les formules trigonométriques.]
3. Montrer par récurrence sur n que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
4. Montrer que, pour tout $x \in [-1;1]$, $f_n(x) = \cos(n.\arccos(x))$.
5. Calculer f_n' et f_n'' puis montrer que, pour tout $x \in [-1;1]$:

$$(1-x^2)f_n''(x) - xf_n'(x) + n^2 f_n(x) = 0$$

Exercice 6 :
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction à deux variables continue, dérivable et de dérivée continue. On va montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\qquad xe^y \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (1+e^y)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

(2) $\qquad$ Il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x,y) = g\left(\dfrac{x}{1+e^y}\right)$

1. On commence par supposer que f vérifie (2). On va montrer qu'alors elle vérifie aussi (1).
a) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de g'.
b) Montrer que f vérifie (1).
2. On suppose maintenant que f vérifie (1). On va montrer qu'alors elle vérifie aussi (2).
a) Soit $K \in \mathbb{R}$ quelconque. Calculer la dérivée de $\phi : t \to f(K(1+e^t), t)$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}$.

b) En utilisant la propriété (1), montrer que la dérivée calculée à la question a) est nulle.

c) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = f(K(1+e^t), t) = f(2K, 0)$.

d) On pose $g(s) = f(2s, 0)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tous réels x et y, $f(x, y) = g\left(\frac{x}{1+e^y}\right)$. [Indication : poser $t = y$ et $K = \frac{x}{1+e^y}$ et utiliser le fait que $f(x, y) = f(K(1+e^t), t)$.]

Exercice 7 : [Équation d'Alembert]
On s'intéresse dans cet exercice à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = 0$$

où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction à deux variables continue, dérivable et de dérivées continues et c est un réel strictement positif quelconque.
On note t la deuxième variable (au lieu de y) car elle représente le temps : l'équation différentielle considérée est celle d'une corde tendue qui vibre autour de l'horizontale. Le réel $f(x, t)$ représente la hauteur du point x de la corde, à l'instant t.

1. a) On suppose qu'il existe f_+ et f_- des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles que $f(x, t) = f_+(x - ct) + f_-(x + ct)$. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ en fonction de f_+'' et f_-''. En déduire que f vérifie l'équation d'Alembert.

b) On suppose maintenant que f vérifie l'équation d'Alembert et on va montrer qu'il existe f_+ et f_- comme à la question a). On pose $g(x, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$. Montrer que $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial g}{\partial t}(x, t) = 0$.

c) Montrer que, pour tout $K \in \mathbb{R}$, $\phi : t \to g(K - ct, t)$ est une fonction constante. En déduire que, pour tous x et t, $g(x, t) = g(x + ct, 0)$.

d) On définit $f_- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une primitive de la fonction $y \to g(y, 0)/2$ et on pose $h(x, t) = f(x, t) - f_-(x + ct)$. Calculer les dérivées partielles de h en fonctions de g et des dérivées partielles de f. Montrer que $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial g}{\partial t}(x, t) = 0$.

e) Montrer que, pour tout $K \in \mathbb{R}$, $\psi : t \to h(K + ct, t)$ est une fonction constante. En déduire que, pour tous x et t, $h(x, t) = h(x - ct, 0)$.

f) On pose $f_+(y) = h(y, 0)$. Montrer que $f(x, t) = f_+(x - ct) + f_-(x + ct)$.

2. On cherche maintenant des solutions non-nulles de la forme $f(x, t) = g(x)h(t)$ où g est h sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.
a) Montrer qu'on doit avoir $g''(x)h(t) - \frac{1}{c^2}g(x)h''(t) = 0$ pour tous x et t.

b) Comme h n'est pas la fonction nulle, il existe t_0 tel que $h(t_0) \neq 0$. On pose $\alpha = -\frac{h''(t_0)}{c^2 h(t_0)}$. Montrer que $g'' + \alpha g = 0$. On admet dans la suite que $\alpha > 0$ (pour des raisons physiques de conservation d'énergie).

c) Montrer que $h'' + c^2\alpha h = 0$.

d) Montrer qu'il existe A_1, A_2, B_1 et B_2 des réels tels que, pour tous x et t :

$$g(x) = A_1 \sin(\sqrt{\alpha}x) + A_2 \cos(\sqrt{\alpha}x) \qquad h(t) = B_1 \sin(\sqrt{\alpha}ct) + B_2 \cos(\sqrt{\alpha}ct)$$

e) Soit $L > 0$ fixé. On voudrait de plus que, pour tout t, $f(0, t) = f(L, t) = 0$ (cela correspond au cas d'une corde de longueur L fixée à ses extrémités). Que pouvez-vous dire de A_2 et $\sqrt{\alpha}$?