Université Pierre et Marie Curie
LM110

Les 13 et 14 décembre 2012
http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM110.html

TD : Fonctions

Corrigé

Exercice 1 :

1.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{1+\sqrt{1+x}} \\ &= \sqrt{1+1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+x^2\epsilon(x)} \\ &= \sqrt{2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+x^2\epsilon(x)} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+x^2\epsilon(x)} \end{aligned}$$

En posant $X = \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + x^2\epsilon(x)$ et en utilisant $\sqrt{1+X} = 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + X^2\epsilon(X)$, on obtient :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{2}(1+\frac{1}{2}(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+x^2\epsilon(x)) - \frac{1}{8}(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+x^2\epsilon(x))^2 + x^2\epsilon(x)) \\ &= \sqrt{2}(1+\frac{x}{8}-\frac{x^2}{32}-\frac{x^2}{128}+x^2\epsilon(x)) \\ &= \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}x-\frac{5\sqrt{2}}{128}x^2+x^2\epsilon(x) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \exp(1-\frac{x^2}{2}+x^2\epsilon(x)) \\ &= e \times e^{-\frac{x^2}{2}+x^2\epsilon(x)} \\ &= e(1-\frac{x^2}{2}+x^2\epsilon(x)) \\ &= e-\frac{e}{2}x^2+x^2\epsilon(x) \end{aligned}$$

3. Posons $y = x - 1$.

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \ln(1 + (y+1)^2) \\ &= \ln(2 + 2y + y^2) \\ &= \ln(2 \times (1 + y + \frac{y^2}{2})) \\ &= \ln(2) + \ln(1 + y + \frac{y^2}{2}) \\ &= \ln(2) + (y + \frac{y^2}{2}) - \frac{1}{2}(y + \frac{y^2}{2})^2 + y^2\epsilon(y) \\ &= \ln(2) + y + y^2\epsilon(y) \\ &= \ln(2) + (x-1) + (x-1)^2\epsilon(x-1) \end{aligned}$$

4. La méthode la plus simple ici est sans doute d'utiliser Taylor-Young :

$$\begin{aligned} f_4\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1 \\ f_4'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= (1 + \tan^2)\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \\ f_4''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 2(1 + \tan^2)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4(x) &= f_4\left(\frac{\pi}{4}\right) + f_4'\left(\frac{\pi}{4}\right)(x - \frac{\pi}{4}) + f_4''\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2} + (x - \frac{\pi}{4})^2\epsilon(x - \frac{\pi}{4}) \\ &= 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + (x - \frac{\pi}{4})^2\epsilon(x - \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

Exercice 2 :

1. f_1 n'est pas continue en 0. Pour le démontrer, on peut considérer la suite $u_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. La suite tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Pour tout n, $f_1(u_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_1(u_n) = 1$.
Si f_1 était continue en 0, on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} f_1(u_n) = f_1(0) = 0$, par composition des limites. C'est donc que f_1 n'est pas continue en 0.
Comme f_1 n'est pas continue en 0, elle n'y est pas dérivable et n'y admet pas non plus de DL.
2. $e^x - 1 - x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$ donc :

$$f_2(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x} = \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)}{x} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2\epsilon(x)$$

Donc f_2 est continue en 0 : $\lim\limits_{x\to0} f_2(x) = \frac{0}{2} + \frac{0}{6} + 0 = f_2(0)$.
Elle est aussi dérivable : $\frac{f_2(x) - f_2(0)}{x} = \frac{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2\epsilon(x)}{x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + x\epsilon(x) \to \frac{1}{2}$ quand $x \to 0$.
Elle admet un développement limité d'ordre 2 : $f_2(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2\epsilon(x)$.

3. f_3 est continue en 0 car c'est le produit de deux fonctions continues.
Elle est dérivable en 0 : $\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x} = |x| \to 0$ quand $x \to 0$ (donc $f_3'(0) = 0$).
Montrons qu'en revanche, elle n'admet pas de développement limité d'ordre 2 : supposons par l'absurde que $f_3(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + x^2\epsilon(x)$. Alors $\alpha = f_3(0) = 0$ et $\beta = f_3'(0) = 0$. On a donc $f_3(x) = x^2(\gamma + \epsilon(x))$. Donc, lorsque $x \to 0$, $\frac{f_3(x)}{x^2} \to \gamma + \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = \gamma$. En particulier, la fonction $\frac{f_3(x)}{x^2}$ doit admettre une limite en 0.
Mais, si $x > 0$, $\frac{f_3(x)}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$ et, si $x < 0$, $\frac{f_3(x)}{x^2} = \frac{-x^2}{x^2} = -1$. Donc la limite à droite de $\frac{f_3(x)}{x^2}$ est 1 et la limite à gauche est -1. La limite n'existe donc pas.
On a obtenu une contradiction, c'est donc que f_3 n'admettait pas de développement limité d'ordre 2 en 0.

Exercice 3 :
1. $\ln(e^x - 1)' = \frac{e^x}{e^x-1}$
$\ln(1 - e^x)' = \frac{-e^x}{1-e^x} = \frac{e^x}{e^x-1}$
$\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)' = \frac{e^x(e^x-1)-e^x.e^x}{(e^x-1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$
2. $f'(x) = \frac{e^x}{e^x-1}f(x) - \frac{e^x}{e^x-1}$
La fonction $\ln(e^x - 1)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et, d'après le 1., c'est une primitive de $\frac{e^x}{e^x-1}$. Les solutions de l'équation homogène associée sont donc les $K\exp(\ln(e^x - 1)) = K(e^x - 1)$ pour $K \in \mathbb{R}$.
Cherchons une solution particulière sous la forme $f_0(x) = K(x)(e^x - 1)$. On doit avoir :

$$K'(x)(e^x - 1) + K(x)e^x = f_0'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}f_0(x) - \frac{e^x}{e^x - 1} = e^x K(x) - \frac{e^x}{e^x - 1}$$

Donc $K'(x) = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$.
D'après la question 1., une fonction K convenable est $\frac{e^x}{e^x-1}$. On trouve donc $f_0(x) = e^x$.
Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme :

$$f(x) = e^x + K(e^x - 1) \qquad K \in \mathbb{R}$$

3. La résolution est la même qu'à la question 2. La seule différence est que la primitive de $\frac{e^x}{e^x-1}$ n'est plus $\ln(e^x - 1)$ mais $\ln(1 - e^x)$. On trouve ainsi pour solutions toutes les fonctions de la forme :

$$f(x) = e^x + K(1 - e^x) \qquad K \in \mathbb{R}$$

Il s'agit exactement des fonctions de la forme $f(x) = e^x + (-K)(e^x - 1)$ pour $K \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire des fonctions de la forme $f(x) = e^x + K(e^x - 1)$ pour $K \in \mathbb{R}$.
4. Puisque f vérifie l'équation du 2. sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est de la forme trouvée au 2., c'est-à-dire qu'il existe $K_1 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $f(x) = K_1(e^x - 1) + e^x$.
De même, puisque f vérifie l'équation du 3. sur $\mathbb{R}_-^*$, elle est de la forme trouvée au 3., c'est-à-dire qu'il existe $K_2 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x < 0$, $f(x) = K_2(e^x - 1) + e^x$.
5. En 0, $0 = f'(0)(e^0 - 1) = e^0 f(0) - e^0 = f(0) - 1$ donc $f(0) = 1$.

6. La dérivée à droite de f en 0 vaut $f'(0) = K_1 e^0 + e^0 = K_1 + 1$. La dérivée à gauche de f en 0 vaut $f'(0) = K_2 e^0 + e^0 = K_2 + 1$. Puisque la dérivée à gauche est égale à la dérivée à droite (car f est dérivable en 0), on a $K_1 + 1 = K_2 + 1$ donc $K_1 = K_2$.
Les solutions sont toutes les fonctions de la forme :

$$f(x) = K(e^x - 1) + e^x \qquad K \in \mathbb{R}$$

Exercice 4 :
1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y^2 + x + 1)e^{x+y}$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2y + y^2 + x)e^{x+y}$
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (y^2 + x + 2)e^{x+y}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (2y + y^2 + x + 1)e^{x+y}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = (2y + y^2 + x + 1)e^{x+y}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (4y + y^2 + x + 2)e^{x+y}$
Le théorème de Schwarz est bien vérifié : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
3. En un extremum local, les dérivées partielles sont nulles donc :

$$(y^2 + x + 1)e^{x+y} = 0 \text{ et } (2y + y^2 + x)e^{x+y} = 0$$

Puisque e^{x+y} n'est pas nul, on doit avoir :

$$y^2 + x + 1 = 0 \text{ et } y^2 + 2y + x = 0$$

En faisant la différence des deux équations, on trouve $2y - 1 = 0$ soit $y = 1/2$. Donc $x = -1 - y^2 = -5/4$.
4. $f(-\frac{5}{4}, \frac{1}{2}) = -e^{-3/4}$
Calculons les dérivées partielles d'ordre 2 en $(-\frac{5}{4}, \frac{1}{2})$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^{-3/4}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{-3/4}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 3e^{-3/4}$
Le développement limité d'ordre 2 est :

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(-\frac{5}{4}, \frac{1}{2}) + \frac{\partial f}{\partial x}(-\frac{5}{4}, \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})\frac{\partial f}{\partial y}(-\frac{5}{4}, \frac{1}{2})(y + \frac{5}{4}) \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{5}{4}, \frac{1}{2})\frac{(x + \frac{5}{4})^2}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-\frac{5}{4}, \frac{1}{2})(x + \frac{5}{4})(y - \frac{1}{2}) \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\frac{5}{4}, \frac{1}{2})\frac{(y - \frac{1}{2})^2}{2} + ((x + \frac{5}{4})^2 + (y - \frac{1}{2})^2)\epsilon(\sqrt{(x + \frac{5}{4})^2 + (y - \frac{1}{2})^2}) \\
&= e^{-3/4}(-1 + \frac{(x + \frac{5}{4})^2}{2} + (x + \frac{5}{4})(y - \frac{1}{2}) + \frac{3(y - \frac{1}{2})^2}{2} \\
&+ ((x + \frac{5}{4})^2 + (y - \frac{1}{2})^2)\epsilon(\sqrt{(x + \frac{5}{4})^2 + (y - \frac{1}{2})^2}))
\end{aligned}$$

5. $e^{-3/4}.(3e^{-3/4}) - (e^{-3/4})^2 = 2e^{-3/2} > 0$ donc le point est un minimum local.

Exercice 5 :

1. $f_2(x) = 2xf_1(x) - f_0(x) = 2x^2 - 1$
$f_3(x) = 2xf_2(x) - f_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$
2.

$$\begin{aligned}\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) &= \cos((n+1)\theta + \theta) + \cos((n+1)\theta - \theta) \\ &= \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \sin((n+1)\theta)\sin(\theta) + \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) + \sin((n+1)\theta) \\ &= 2cos(\theta)\cos((n+1)\theta)\end{aligned}$$

3. Pour $n = 0$, c'est vrai : $f_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0) = \cos(0.\theta)$. Pour $n = 1$, c'est aussi vrai : $f_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$.
On suppose que c'est vrai jusqu'à $n \geq 1$ et on le démontre pour $n + 1$:

$$\begin{aligned}f_{n+1}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)f_n(\cos(\theta)) - f_{n-1}(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) \\ &= \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) - \cos((n-1)\theta) \\ &= \cos((n+1)\theta)\end{aligned}$$

Donc si c'est vrai jusqu'à n, c'est vrai aussi pour $n+1$. La propriété voulue est donc vraie pour tout n.
4. $f_n(x) = f_n(\cos(\arccos(x))) = \cos(n.\arccos(x))$
5.

$$f_n(x) = \cos(n.\arccos(x))$$
$$f_n'(x) = -\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n.\arccos(x))$$
$$f_n''(x) = -\frac{nx}{(1-x^2)^{3/2}}\sin(n.\arccos(x)) - \frac{n^2}{1-x^2}\cos(n.\arccos(x))$$

$$\begin{aligned}(1-x^2)f_n''(x) - xf_n'(x) + n^2f_n(x) &= (1-x^2)(-\frac{nx}{(1-x^2)^{3/2}}\sin(n.\arccos(x)) - \frac{n^2}{1-x^2}\cos(n.\arccos(x))) \\ &+ x\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n.\arccos(x)) + n^2\cos(narcos(x)) \\ &= -\frac{nx}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n.\arccos(x)) - n^2\cos(n.\arccos(x)) \\ &+ \frac{nx}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n.\arccos(x)) + n^2\cos(n.\arccos(x)) \\ &= 0\end{aligned}$$

Exercice 6 :

1. a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+e^y} g'\left(\frac{x}{1+e^y}\right)$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{xe^y}{(1+e^y)^2} g'\left(\frac{x}{1+e^y}\right)$
b)

$$\begin{aligned} xe^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (1+e^y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= (\frac{xe^y}{1+e^y} - \frac{xe^y}{1+e^y})g'\left(\frac{x}{1+e^y}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. a)

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= (K(1+e^t))'\frac{\partial f}{\partial x}(K(1+e^t),t) + (t)'\frac{\partial f}{\partial y}(K(1+e^t),t) \\ &= Ke^t\frac{\partial f}{\partial x}(K(1+e^t),t) + \frac{\partial f}{\partial y}(K(1+e^t),t) \end{aligned}$$

b) Posons $X = K(1+e^t)$ et $Y = t$. On a alors, d'après la propriété (1) :

$$\begin{aligned} 0 &= Xe^Y\frac{\partial f}{\partial x}(X,Y) + (1+e^Y)\frac{\partial f}{\partial y}(X,Y) \\ &= K(1+e^t)e^t\frac{\partial f}{\partial x}(K(1+e^t),t) + (1+e^t)\frac{\partial f}{\partial y}(K(1+e^t),t) \\ &= (1+e^t)(Ke^t\frac{\partial f}{\partial x}(K(1+e^t),t) + \frac{\partial f}{\partial y}(K(1+e^t),t)) \end{aligned}$$

Donc, en divisant par $1+e^t \neq 0$, on trouve $\phi'(t) = Ke^t\frac{\partial f}{\partial x}(K(1+e^t),t) + \frac{\partial f}{\partial y}(K(1+e^t),t) = 0$.
c) La fonction ϕ est constante, puisqu'elle est dérivable de dérivée nulle. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \phi(0) = f(2K,0)$.
d) Posons $t = y$ et $K = \frac{x}{1+e^y}$. Alors $f(x,y) = f(K(1+e^t),t) = \phi(t) = f(2K,0) = g(K) = g\left(\frac{x}{1+e^y}\right)$.

Exercice 7 :
1. a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = f_+'(x-ct) + f_-'(x+ct)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = f_+''(x-ct) + f_-''(x+ct)$
$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -cf_+'(x-ct) + cf_-'(x+ct)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = c^2(f_+(x-ct) + f_-(x+ct))$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = f_+(x-ct) + f_-(x+ct) - \frac{c^2}{c^2}(f_+(x-ct) + f_-(x+ct)) = 0$
b) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) + \frac{1}{c}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(x,t)$
$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(x,t) + \frac{1}{c}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)$
On utilise la relation de Schwarz : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$.
$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) - \frac{1}{c}\frac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0$
c) $\phi'(t) = -c\frac{\partial g}{\partial x}(K-ct,t) + \frac{\partial g}{\partial t}(K-ct,t) = -c(\frac{\partial g}{\partial x}(K-ct,t) - \frac{1}{c}\frac{\partial g}{\partial t}(K-ct,t)) = 0$

La fonction ϕ est de dérivée nulle. Elle est donc constante et, pour tout K, $g(K-ct,t)=\phi(t)=\phi(0)=g(K,0)$.
Donc, pour tous x et t, si on pose $K=x+ct$, on trouve : $g(x+ct,0)=g(K,0)=g(K-ct,t)=g(x,t)$.
d) $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)-f_-'(x+ct)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)-\frac{1}{2}g(x+ct,0)$
$\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial f}{\partial t}(x,y)-cf_-'(x+ct)=\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)-\frac{c}{2}g(x+ct,0)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)+\frac{1}{c}\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)&=\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)-\frac{1}{2}g(x+ct,0)-\frac{1}{2}g(x+ct,0)\\&=g(x,t)-g(x+ct,0)=0\end{aligned}$$

e) $\psi'(t)=c\frac{\partial h}{\partial x}(K+ct,t)+\frac{\partial h}{\partial t}(K+ct,t)=c(\frac{\partial h}{\partial x}(K+ct,t)+\frac{1}{c}\frac{\partial h}{\partial x}(K+ct,t))=0$
Donc ψ est constante et, pour tous K et t, $h(K+ct,t)=\psi(t)=\psi(0)=h(K,0)$.
Pour tous x et t, si on pose $K=x-ct$, $h(x-ct,0)=h(K,0)=h(K+ct,t)=h(x,t)$.
f) $f(x,t)=h(x,t)+f_-(x+ct)=h(x-ct,0)+f_-(x+ct)=f_+(x-ct)+f_-(x+ct)$.
2. a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=g'(x)h(t)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)=g''(x)h(t)$
De même, $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=g(x)h''(t)$.
L'équation d'Alembert devient donc $g''(x)h(t)-\frac{1}{c^2}g(x)h''(t)=0$.
b) Pour tout x, $g''(x)h(t_0)-\frac{1}{c^2}g(x)h''(t_0)=0$ donc :

$$0=g''(x)-\frac{h''(t_0)}{c^2h(t_0)}g(x)=g''(x)+\alpha g(x)$$

c) Pour tout x, $g''(x)=-\alpha g(x)$ donc :

$$0=g''(x)h(t)-\frac{1}{c^2}g(x)h''(t)=-\alpha g(x)h(t)-\frac{1}{c^2}g(x)h''(t)=-\frac{g(x)}{c^2}(c^2\alpha h(t)+h''(t))$$

Il existe un x pour lequel $g(x)$ est non-nul. Pour ce x, on peut diviser par $-\frac{g(x)}{c^2}$ et on trouve que, pour tout t, $h''(t)+c^2\alpha h(t)=0$.
d) On résoud les équations différentielles des questions b) et c). Les polynômes caractéristiques sont $X^2+\alpha$ et $X^2+c^2\alpha$. Leurs racines sont imaginaires pures de la forme $\pm i\sqrt{\alpha}$ et $\pm i\sqrt{\alpha}c$. Les fonctions g et h sont donc de la forme :

$$g(x)=A_1\sin(\sqrt{\alpha}x)+A_2\cos(\sqrt{\alpha}x)\text{ et }h(t)=B_1\sin(\sqrt{\alpha}ct)+B_2\cos(\sqrt{\alpha}ct)$$

e) Puisque $g(0)h(t)=f(0,t)=0$ pour tout t et puisque h n'est pas la fonction nulle, on doit avoir $g(0)=0$. Or $g(0)=A_2$ donc $A_2=0$.
De même, $g(L)=0$ donc $A_1\sin(\sqrt{\alpha}L)=0$ Puisque g n'est pas la fonction nulle, $A_1\neq 0$ donc $\sin(\sqrt{\alpha}L)=0$. Donc $\sqrt{\alpha}L\equiv 0[\pi]$, ce qui signifie qu'il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{\alpha}=\frac{k\pi}{L}$. (Ce k est strictement positif car $\sqrt{\alpha}\geq 0$ et, en fait $\sqrt{\alpha}\neq 0$ sinon g est nulle.)