Université Pierre et Marie Curie
LM110

Les 15 et 16 novembre 2012
http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM110.html

TD : Fonctions

Exercice 1 :

1. Soient E et F deux ensembles. Dire, pour chacune des propriétés suivantes, quelles sont les fonctions $f : E \to F$ qui la vérifient.

(1) $\forall x \in E \exists y \in F$ tel que $f(x) = y$
(2) $\exists y \in F$ tel que $\forall x \in E, f(x) = y$
(3) $\forall y \in F \exists x \in E$ tel que $f(x) = y$
(4) $\forall x \in E \forall y \in E, f(x) = f(y)$

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \{1, 2\} \to \{3, 4\}$. Lesquelles sont bijectives ?
[Remarque : $\{1, 2\}$ désigne l'ensemble qui contient l'entier 1 et l'entier 2. De même pour $\{3, 4\}$.]

3. Déterminer toutes les fonctions $f : \{1, 2\} \to \{1, 2, 3\}$ qui sont injectives. Existe-t-il des fonctions $f : \{1, 2\} \to \{1, 2, 3\}$ qui soient surjectives ?

4. Soient E, F, G trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions surjectives. Montrer que $g \circ f$ est surjective.

Exercice 2 :

Déterminer l'ensemble de définition maximal des fonctions suivantes.

$f_1 : x \to \sqrt{|x| - 2}$
$f_2 : x \to \ln(1 + x) + \ln(x - 4)$
$f_3 : x \to \ln(x^2 - 3x - 4)$
$f_4 : x \to \frac{\cos(x)}{e^{3x}+4e^{2x}+e^{x}-6}$

Exercice 3 :

1. Montrer que les fonctions suivantes sont des bijections et calculer leur réciproque.

$f_1 : x \to \frac{x-1}{x+2} :]-2; +\infty[\to]-\infty; 1[$
$f_2 : \arctan(1 - e^x) : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}[$
$f_3 : x \to e^{2x} - 2e^x - 8 : [0; +\infty[\to [-9; +\infty[$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une bijection. Montrer que $g = \frac{1}{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une bijection et que sa réciproque vaut $g^{-1}(x) = f^{-1}(1/x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4 :

1. Trouver toutes les fonctions f continues et dérivables (deux fois dérivables pour les équations (3) à (5)), définies sur l'intervalle indiqué et vérifiant les équations différentielles suivantes.

$$\begin{array}{lll}
(1) & f'(x)=\sin(x)f(x) & \text{sur } \mathbb{R} \\
(2) & f'(x)=3x^2f(x)+\frac{e^{x^3}}{x} & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \\
(3) & f''(x)=2f'(x)-\frac{3}{4}f(x) & \text{sur } \mathbb{R} \\
(4) & f''(x)+10f'(x)+25f(x)=0 & \text{sur } \mathbb{R} \\
(5) & f''(x)=2f'(x)-5f(x) & \text{sur } \mathbb{R}
\end{array}$$

2. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et deux fois dérivables qui vérifient l'équation différentielle $f''(x)+2f'(x)+10f(x)=0$, et telles que :

$$f(0)=1 \text{ et } f'(0)=5$$

Exercice 5 :

1. Montrer que $f_1 : x \to e^x+e^{2x}+e^{3x}-3$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-3;+\infty[$. Calculer le développement limité de f_1^{-1} en 0 à l'ordre 2.

2. a) Pour tout $x \in]-1;+\infty[-\{0\}$, on pose $f_2(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$. Montrer que f_2 se prolonge par continuité en 0, par $f_2(0)=1$.

On admet que f_2, ainsi prolongée, est décroissante et réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ vers $]0;+\infty[$.

b) Montrer que f_2 admet un développement limité d'ordre 2 en 0 et le calculer.

c) On admet que f_2^{-1} possède un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 1. Le calculer.

[Bonus : Montrer que f_2 est décroissante et réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ vers $]0;+\infty[$.]

Exercice 6 :

Calculer les limites des fonctions suivantes aux points demandés :

$$\begin{array}{ll}
f_1 : x \to \frac{\ln^2(x)+\ln(x)+1}{\ln^2(x)-3\ln(x)+3} & \text{en } 0 \text{ et en } +\infty \\
f_2 : x \to \frac{e^{x^2}-x\sin(x)}{e^{x^3}+x^2} & \text{en } +\infty \\
f_3 : x \to \frac{1}{\tan(x)}-\frac{1}{x} & \text{en } 0 \\
f_4 : x \to (1+x)^{1/x} & \text{en } 0 \\
f_5 : x \to \tan(x)+\ln(\frac{\pi}{2}-x) & \text{en } \frac{\pi}{2}^-
\end{array}$$

[Indication pour 3, 4 et 5 : utiliser des développements limités ; la cinquième est difficile.]

Exercice 7 : [Difficile, suite de l'exercice bonus du dernier contrôle continu]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable. On suppose qu'en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, f admet un développement limité d'ordre 2 de la forme suivante :

$$f(x_0+x)=f(x_0)+xf'(x_0)+x^2g(x_0)+x^2\epsilon(x)$$

où g est une certaine fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Le but de l'exercice est de montrer que, si g est continue, alors f est de classe $\mathcal{C}^2$. On a vu pendant le dernier contrôle continu que, si on ne supposait pas g continue, f pouvait ne pas être deux fois dérivable.

Dans les questions 1. à 3., on supposera que g est la fonction nulle.

1. Dans cette question, on suppose que $f(0) - 2f(x/2) + f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On va montrer que, dans ce cas, f est affine.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Montrer par récurrence sur n que, pour tout $n \geq 0$, $f(x) - f(0) = 2^n(f(x/2^n) - f(0))$.

b) Montrer que $f(x) = f(0) + xf'(0)$. [Indication : faire tendre n vers $+\infty$ dans la question précédente et montrer que la partie droite de l'égalité converge vers $xf'(0)$.]

c) En déduire que f est affine et donc de classe $\mathcal{C}^2$.

2. Dans cette question et la suivante, on suppose, par l'absurde, qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(0) - 2f(x/2) + f(x) \neq 0$. On fixe un tel x et on note $\epsilon = f(0) - 2f(x/2) + f(x)$. On suppose $\epsilon > 0$ et $x > 0$ (on pourrait faire le même raisonnement pour $\epsilon < 0$ ou $x < 0$).

On va construire par récurrence deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant les propriétés suivantes :

(1) (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.

(2) $v_n - u_n = \frac{x}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) $f(u_n) - 2f(\frac{u_n+v_n}{2}) + f(v_n) \geq \frac{\epsilon}{2^{2n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) On pose $u_0 = 0$ et $v_0 = x$. Montrer que les propriétés (2) et (3) sont vérifiées pour $n = 0$.

b) On suppose qu'on a construit $u_0, ..., u_n$ et $v_0, ..., v_n$ vérifiant les propriétés (1), (2) et (3). On va construire u_{n+1} et v_{n+1} vérifiant aussi ces propriétés.
Montrer que l'une des trois affirmations suivantes est vérifiée :

(A) $f(u_n) - 2f(\frac{3u_n+v_n}{4}) + f(\frac{u_n+v_n}{2}) \geq \epsilon/2^{2(n+1)}$

(B) $f(\frac{3u_n+v_n}{4}) - 2f(\frac{u_n+v_n}{2}) + f(\frac{u_n+3v_n}{4}) \geq \epsilon/2^{2(n+1)}$

(C) $f(\frac{u_n+v_n}{2}) - 2f(\frac{u_n+3v_n}{4}) + f(v_n) \geq \epsilon/2^{2(n+1)}$

[Indication : Calculer $(f(u_n) - 2f(\frac{3u_n+v_n}{4}) + f(\frac{u_n+v_n}{2})) + 2(f(\frac{3u_n+v_n}{4}) - 2f(\frac{u_n+v_n}{2}) + f(\frac{u_n+3v_n}{4})) + (f(\frac{u_n+v_n}{2}) - 2f(\frac{u_n+3v_n}{4}) + f(v_n))$.]

c) Si (A) est vraie, on pose $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$. Sinon, si (B) est vraie, on pose $u_{n+1} = \frac{3u_n+v_n}{4}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4}$. Sinon, on pose $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$.
Montrer que les propriétés (2) et (3) sont vérifiées pour $n+1$, que, de plus, $(u_0, ..., u_{n+1})$ est croissante et $(v_0, ..., v_{n+1})$ décroissante.

3. On note (u_n) et (v_n) les suites construites dans la question précédente.

a) Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que, pour tout n, $u_n \leq l \leq v_n$. En déduire que, pour tout n, $|u_n - l| \leq \frac{x}{2^n}$, $|\frac{u_n+v_n}{2} - l| \leq \frac{x}{2^n}$ et $|v_n - l| \leq \frac{x}{2^n}$.

c) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $y \in [l - \alpha; l + \alpha]$:

$$f(l) + f'(l)(y - l) - (y - l)^2 \frac{\epsilon}{8x^2} \leq f(y) \leq f(l) + f'(l)(y - l) + (y - l)^2 \frac{\epsilon}{8x^2}$$

[Indication : utiliser le fait que $g(l) = 0$.]

d) Montrer que, pour tout n assez grand, les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$f(u_n) \leq f(l) + (u_n - l)f'(l) + \frac{\epsilon}{2^{2n+3}}$$
$$f(\frac{u_n + v_n}{2}) \geq f(l) + \left(\frac{u_n + v_n}{2} - l\right) f'(l) - \frac{\epsilon}{2^{2n+3}}$$
$$f(v_n) \leq f(l) + (v_n - l)f'(l) + \frac{\epsilon}{2^{2n+3}}$$

e) En déduire une absurdité. [Indication : montrer que la propriété (3) n'est pas vérifiée pour n assez grand.]

4. Dans les questions 2. et 3., on a montré que, si g était la fonction nulle, alors nécessairement l'hypothèse de la question 1. était vérifiée et donc f était de classe $\mathcal{C}^2$.
Dans cette question, on ne suppose plus que g est nulle.

a) On note G une primitive de $2g$ et H une primitive de G. Montrer que $f - H$ admet un développement limité d'ordre 2 en tout point et calculer le terme d'ordre 2 de ce développement.

b) En déduire que $f - H$ est de classe $\mathcal{C}^2$ puis que f est de classe $\mathcal{C}^2$.