Université Pierre et Marie Curie — Les 15 et 16 novembre 2012
LM110 — http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM110.html

TD : Fonctions

Corrigé

Exercice 1 :

1. (1) Toutes les fonctions vérifient cette propriété.
Démonstration : soit $f : E \to F$ une fonction quelconque. Il faut montrer que, pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que $f(x) = y$. Soit donc $x \in E$ quelconque. Posons $y = f(x)$. On a bien $y \in F$ et $f(x) = y$. Donc il existe $y \in F$ tel que $f(x) = y$.

(2) Les fonctions vérifiant cette propriété sont les fonctions constantes, c'est-à-dire les fonctions ne prenant qu'une seule valeur.
Démonstration : soit $f : E \to F$ une fonction vérifiant la propriété (2). Soit $y \in F$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) = y$. La propriété (2) nous permet de dire qu'il existe. L'image par f de n'importe quel point $x \in E$ est $f(x) = y$ donc la fonction f est constante en y.
Réciproquement, supposons que $f : E \to F$ est constante. Soit $c \in F$ l'unique valeur image de f. Pour tout $x \in E$, $f(x) = c$ donc, si on prend $y = c$, on a bien :

$$\forall x \in E, f(x) = y$$

La propriété (2) est donc vérifiée.

(3) Les fonctions vérifiant cette propriété sont les fonctions surjectives (c'est la définition : une fonction $f : E \to F$ est surjective si tout point y admet un antécédant x par f).

(4) Les fonctions vérifiant cette propriété sont les fonctions constantes.
Démonstration : soit $f : E \to F$ vérifiant (4) quelconque. On va montrer que f est constante. Choisissons $x \in E$ quelconque. Posons $c = f(x)$. Pour tout $y \in E$, $f(y) = c$, puisque $f(y) = f(x)$. Donc la fonction f ne prend que la valeur x ; elle est bien constante.
Réciproquement, montrons que toutes les fonctions constantes vérifient la propriété (4). Soit $f : E \to F$ une fonction constante quelconque. Notons c son unique valeur. Pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in E$, $f(x) = c = f(y)$ donc $f(x) = f(y)$. La propriété (4) est donc vérifiée.

2. Pour $x = 1$ ou $x = 2$, $f(x)$ peut prendre deux valeurs : 3 ou 4. Il y a donc quatre fonctions possibles :

$$\begin{array}{ll} (1) & f(1) = 3; f(2) = 3 \\ (2) & f(1) = 3; f(2) = 4 \\ (3) & f(1) = 4; f(2) = 3 \\ (4) & f(1) = 4; f(2) = 4 \end{array}$$

Les fonctions (1) et (4) ne sont pas injectives car $1 \neq 2$ mais $f(1) = f(2)$. Elles ne sont donc pas bijectives.

En revanche, (3) et (4) sont bijectives : elles sont injectives puisque deux points différents ont deux images différentes ($f(1) \neq f(2)$) et surjectives car tous les points de $\{3, 4\}$ (c'est-à-dire 3 et 4) ont un antécédant par f.

3. La seule condition à respecter est que deux points différents aient des images différentes, c'est-à-dire que $f(1) \neq f(2)$. On trouve donc six solutions :

(1) $f(1) = 1; f(2) = 2$
(2) $f(1) = 1; f(2) = 3$
(3) $f(1) = 2; f(2) = 1$
(4) $f(1) = 2; f(2) = 3$
(5) $f(1) = 3; f(2) = 1$
(6) $f(1) = 3; f(2) = 2$

Une fonction $f : \{1, 2\} \to \{1, 2, 3\}$ n'est jamais surjective : f ne peut prendre que deux valeurs au plus, $f(1)$ et $f(2)$. Il y aura donc toujours l'un des trois nombres $1, 2$ ou 3 qui ne sera pas égal à $f(1)$ ou $f(2)$, donc qui n'aura pas d'antécédant par f.

4. On veut montrer que, pour tout $y \in G$, y a un antécédant par $g \circ f$. Soit donc $y \in G$ quelconque.
Puisque g est surjective, il existe $z \in F$ tel que $g(z) = y$ (c'est-à-dire que y a un antécédant par g, qu'on note z).
Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = z$.
Le point x est un antécédant de y par $g \circ f$: $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(z) = y$. Donc y a bien un antécédant par $g \circ f$.
Puisque la démonstration est valable pour tous les $y \in G$ (car on a supposé y quelconque), la fonction $g \circ f$ est surjective.

Exercice 2 :

1. f_1 est définie ssi $|x| - 2 \geq 0$, c'est-à-dire $|x| \geq 2$. Il faut donc être dans l'un des deux cas suivants :
1 - $x \geq 0$ et $|x| = x \geq 2$
2 - $x \leq 0$ et $|x| = -x \geq 2$
On peut simplifier chacun des deux cas :
1 - $x \geq 0$ et $x \geq 2$ ssi $x \geq 2$
2 - $x \leq 0$ et $-x \geq 2$ ssi $x \leq -2$
La fonction f_1 est donc définie en tous les x tels que $x \geq 2$ ou $x \leq -2$, soit sur $[2; +\infty[\cup] - \infty; -2]$.

2. f_2 est définie si $\ln(1 + x)$ et $\ln(x - 4)$ sont définies, c'est-à-dire si :

$$1 + x > 0 \text{ et } x - 4 > 0$$

Cette condition est équivalente à $x > -1$ et $x > 4$, c'est-à-dire qu'elle est équivalente à $x > 4$. La fonction f_2 est définie sur $]4; +\infty[$.

3. f_3 est définie si $x^2 - 3x - 4 > 0$. Commençons par trouver les racines du polynôme $X^2 - 3X - 4$. Ces racines sont $\frac{3+\sqrt{25}}{2} = 4$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{2} = -1$. Donc $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$ La fonction f_3 est

définie si $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1) > 0$, c'est-à-dire si :

$$(x - 4 > 0 \text{ et } x + 1 > 0) \text{ ou } (x - 4 < 0 \text{ et } x + 1 < 0)$$

soit : $x > 4$ ou $x < -1$. La fonction f_3 est définie sur $]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[$.
4. La fonction f_4 est définie si $e^{3x} + 4e^{2x} + e^x - 6 \neq 0$. Il faut donc résoudre l'équation $e^{3x} + 4e^{2x} + e^x - 6 = 0$. Posons $X = e^x$. L'équation devient :

$$X^3 + 4X^2 + X - 6 = 0$$

Puisque $X = 1$ est solution, on peut mettre $(X - 1)$ en facteur :

$$X^3 + 4X^2 + X - 6 = (X - 1)(X^2 + 5X + 6)$$

Le discriminant du polynôme X^2+5X+6 vaut $\Delta = 5^2 - 4.6 = 1$ donc les racines de X^2+5X+6 sont $X_1 = -2$ et $X_2 = -3$.
On a donc : $X^3+4X^2+X-6 = (X-1)(X+2)(X+3)$, ce qui implique $X^3+4X^2+X-6 = 0$ si et seulement si $X = 1$ ou $X = -2$ ou $X = -3$.
Les points où f_4 n'est pas définie sont donc les x tels que $e^x = 1, -2$ ou -3. Puisque $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \neq -2$ et $e^x \neq -3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le seul point où f_4 n'est pas définie est donc celui où $e^x = 1$, c'est-à-dire $x = 0$.
Donc f_4 est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 3 :
1.1. $f_1(x) = \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2-3}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}$.
$f_1'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ donc f_1 est strictement croissante sur $]-2; +\infty[$. Elle réalise donc une bijection entre $]-2; +\infty[$ et $]\lim\limits_{x\to -2^+} f_1(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)[$.
Lorsque $x \to -2^+$, $x + 2 \to 0^+$ donc $\frac{3}{x+2} \to +\infty$ et $f_1(x) \to -\infty$.
Lorsque $x \to +\infty$, $x + 2 \to +\infty$ donc $f_1(x) \to 1$.
La fonction f_1 réalise donc une bijection entre $]-2; +\infty[$ et $]-\infty; 1[$.
Calculons $f_1^{-1}(x)$ pour $x \in]-\infty; 1[$ quelconque :

$$\begin{aligned} x = f_1(f_1^{-1}(x)) &= 1 - \frac{3}{f_1^{-1}(x) + 2} \\ \Rightarrow \frac{3}{f_1^{-1}(x) + 2} &= 1 - x \\ \Rightarrow f_1^{-1}(x) + 2 &= \frac{3}{1-x} \\ \Rightarrow f_1^{-1}(x) &= \frac{3}{1-x} - 2 \end{aligned}$$

1.2. $f_2'(x) = \frac{-e^x}{1+(1-e^x)^2} < 0$
La fonction f_2 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x); \lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x)[$.

Quand $x \to +\infty$, $1 - e^x \to -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2}$.
Quand $x \to -\infty$, $1 - e^x \to 1$ donc $f_2(x) \to \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.
La fonction f_2 réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}[$.
Calculons $f_2^{-1}(x)$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}[$:

$$\begin{aligned}
x = f_2(f_2^{-1}(x)) &= \arctan(1 - e^{f_2^{-1}(x)}) \\
&\Rightarrow \tan(x) = 1 - e^{f_2^{-1}(x)} \\
&\Rightarrow e^{f_2^{-1}(x)} = 1 - \tan(x) \\
&\Rightarrow f_2^{-1}(x) = \ln(1 - \tan(x))
\end{aligned}$$

1.3. $f_3'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1)$
Pour tout $x > 0$, $e^x > 0$ et $e^x - 1 > 0$ donc $f_3'(x) > 0$. La fonction f_3 est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[0 + \infty[$ vers $[f_3(0); \lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x)[$.
$f_3(0) = e^0 - 2e^0 - 8 = 1 - 2 - 8 = -9$
Puisque $f_3(x) = e^{2x}(1 - 2e^{-x} - 8e^{-2x})$:

$$\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty(1 - 0 - 0) = +\infty$$

La fonction f_3 réalise donc une bijection de $[0; +\infty[$ vers $[-9; +\infty[$.
Calculons, pour tout $x \in [-9; +\infty[$, $f_3^{-1}(x) \in [0; +\infty[$. Soit x quelconque. On note $y = f_3^{-1}(x)$.
Puisque $f_3(y) = f_3(f_3^{-1}(x)) = x$:

$$x = e^{2y} - 2e^y - 8 = (e^y)^2 - 2e^y - 8$$

Si on pose $Y = e^y$, on doit avoir $Y^2 - 2Y - 8 - x = 0$. Résolvons cette équation du deuxième degré :

$$\Delta = 4 + 4(8 + x) = 4(9 + x)$$
$$Y = \frac{2 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = 1 \pm \sqrt{9 + x}$$

Puisque $x \geq -9$, $\sqrt{\Delta}$ est bien définie. Il suffit maintenant de déterminer si $Y = 1 + \sqrt{9 + x}$ ou $Y = 1 - \sqrt{9 + x}$.
Lorsque $x = -9$, les deux solutions sont égales.
Regardons le cas $x \neq -9$. Puisque $y \in [0; +\infty[$, $Y = e^y \geq 1$. Il est donc impossible que $Y = 1 - \sqrt{9 + x}$ car, sinon, on aurait $Y > 1$ puisque $\sqrt{9 + x} > 0$. On doit donc avoir :

$$Y = 1 + \sqrt{9 + x}$$

Et comme $Y = e^y$, $y = \ln(Y) = \ln(1 + \sqrt{9 + x})$.
On a donc trouvé, pour n'importe quel $x \in [-9; +\infty[$:

$$f_3^{-1}(x) = \ln(1 + \sqrt{9 + x})$$

2. Montrons d'abord que g est injective. Il faut montrer que, pour tous les $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq y$, $g(x) \neq g(y)$. Soient x, y quelconques tels que $x \neq y$. Puisque $f(x) \neq f(y)$, $\frac{1}{f(x)} \neq \frac{1}{f(y)}$, c'est-à-dire $g(x) \neq g(y)$. La fonction g est bien injective.
Montrons ensuite que g est surjective. Il faut montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, y admet un antécédant par g. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque. Puisque $\frac{1}{y} \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{y}$ admet un antécédant par f (car f est surjective). Notons x cet antécédant. On a alors $f(x) = \frac{1}{y}$ donc $y = \frac{1}{f(x)} = g(x)$. Le réel x est donc un antécédant de y par g.
Puisque g est injective et surjective, elle est bijective.
Calculons la réciproque. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x = g(g^{-1}(x)) = \frac{1}{f(g^{-1}(x))}$ donc :

$$f(g^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \Rightarrow g^{-1}(x) = f^{-1}(f(g^{-1}(x))) = f^{-1}(\frac{1}{x})$$

Exercice 4 :

On utilise les méthodes de résolution du cours.
1.1. Les solutions sont les $f(x) = Ke^{A(x)}$ où A est une primitive de sin et $K \in \mathbb{R}$. Une primitive de sin est $-\cos$ donc les solutions sont les :

$$f(x) = Ke^{-\cos(x)} \qquad K \in \mathbb{R}$$

1.2. Les solutions sont les $f(x) = Ke^{A(x)} + g(x)$ où $K \in \mathbb{R}$, A est une primitive de $x \to 3x^2$ et g est une solution particulière. Une primitive de $x \to 3x^2$ est $x \to x^3$.
Il faut chercher une solution particulière. Comme aucune n'a l'air évidente, on va utiliser la méthode de la variation de la constante. Cherchons g sous la forme :

$$g(x) = k(x)e^{A(x)} = k(x)e^{x^3}$$

La fonction g doit vérifier l'équation différentielle $g'(x) = 3x^2 g(x) + \frac{1}{x}$. Or $g'(x) = k'(x)e^{x^3} + k(x)(e^{x^3})' = k'(x)e^{x^3} + 3x^2 k(x)e^{x^3}$. L'équation différentielle est donc :

$$k'(x)e^{x^3} + 3x^2k(x)e^{x^3} = 3x^2k(x)e^{x^3} + \frac{e^{x^3}}{x}$$
$$\Leftrightarrow k'(x)e^{x^3} = \frac{e^{x^3}}{x}$$
$$\Leftrightarrow k'(x) = \frac{1}{x}$$

La fonction $k(x) = \ln(x)$ convient donc. La fonction $g(x) = \ln(x)e^{x^3}$ est donc une solution particulière de l'équation.
Les solutions sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = Ke^{x^3} + \ln(x)e^{x^3} \qquad K \in \mathbb{R}$$

1.3. Le polynôme associé à cette équation différentielle est $X^2 - 2X + \frac{3}{4}$. Son discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4.1.\frac{3}{4} = 1$. Les racines du polynôme sont donc réelles ; elles valent :

$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{3}{2}$$

Les solutions de l'équation différentielle (3) sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = \lambda e^{x_1 x} + \mu e^{x_2 x} = \lambda e^{x/2} + \mu e^{3x/2} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

1.4. Le polynôme associé à cette équation différentielle est $X^2 + 10X + 25$. On voit que son discriminant est nul et qu'il a une racine double : $X^2 + 10X + 25 = (X+5)^2$. La racine est -5. Les solutions de l'équation différentielle (3) sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = (\lambda + \mu x)e^{-5x} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

1.5. Le polynôme associé à cette équation différentielle est $X^2 - 2X + 5$. Son discriminant vaut $\Delta = (-2)^2 - 4.1.5 = -16$. Le polynôme n'admet pas de racine réelle. Il admet en revanche des racines complexes, qui sont les suivantes :

$$x_1 = \frac{2 + i\sqrt{16}}{2} = 1 + 2i \qquad x_2 = \frac{2 - i\sqrt{16}}{2} = 1 - 2i$$

Les solutions sont donc les fonctions de la forme :

$$f(x) = e^{\mathrm{Re}\ (x_1)x}(\lambda \cos(x\mathrm{Im}\ x_1) + \mu \sin(x\mathrm{Im}\ x_2)) = e^x(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)) \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

2. Commençons par trouver toutes les solutions de l'équation différentielle. Nous déterminerons ensuite lesquelles vérifient les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = 5$.
Le polynôme associé à l'équation différentielle est $X^2 + 2X + 10$. Son déterminant vaut $\Delta = -36$. Le polynôme n'a donc pas de racine réelle mais deux racines complexes :

$$x_1 = -1 + 3i \qquad x_2 = -1 - 3i$$

D'après le cours, les solutions de l'équation différentielles sont donc les fonctions de la forme :

$$f(x) = e^{-x}(\lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x)) \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Soit f une solution de la forme précédente. On va déterminer quelles conditions λ et μ doivent vérifier pour que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 5$. On utilise le fait que $f'(x) = -e^{-x}(\lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x)) + e^{-x}(-3\lambda \sin(3x) + 3\mu \cos(3x))$.

$$f(0) = e^{-0}(\lambda \cos(3 \times 0) + \mu \sin(3 \times 0)) = \lambda$$
$$f'(0) = -e^{-0}(\lambda \cos(0) + \mu \sin(0)) + e^{-0}(-3\lambda \sin(0) + 3\mu \cos(0))(0) = -\lambda + 3\mu$$

Pour avoir $f(0) = 1$ et $f'(0) = 5$, il faut et suffit donc que les deux égalités suivantes soient vraies :

$$\lambda = 1 \qquad -\lambda + 3\mu = 5$$

On trouve $\lambda = 1$ et $\mu = (\lambda + 1)/3 = 2$. Il y a donc une et une seule solution :

$$f(x) = e^{-x}(\cos(3x) + 2\sin(3x))$$

Exercice 5 :

1. $f_1'(x) = e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f_1 est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)[$.
Quand $x \to -\infty$, $e^x \to 0$, $e^{2x} \to 0$, $e^{3x} \to 0$ donc $f_1(x) \to -3$.
Quand $x \to +\infty$, $e^x \to +\infty$, $e^{2x} \to +\infty$, $e^{3x} \to +\infty$ donc $f_1(x) \to +\infty$.
La fonction f_1 réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-3; +\infty[$.
Puisque la dérivée de f_1 ne s'annule pas, f_1^{-1} est dérivable, de dérivée $\frac{1}{f_1' \circ f_1^{-1}}$. Cette dernière fonction est aussi dérivable car composée de fonctions dérivables donc f_1^{-1} est deux fois dérivable. D'après le théorème de Taylor-Young, elle admet donc un développement limité d'ordre 2 en 0. On va le calculer à partir du développement limité de f_1.
$f_1(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2} - 3 + x^2\epsilon(x) = 6x + 7x^2 + x^2\epsilon(x)$
Puisque $f_1(0) = 0$, $f_1^{-1}(0) = 0$. Le développement limité de f_1^{-1} en 0 est donc de la forme $f_1^{-1}(x) = \alpha x + \beta x^2 + x^2\epsilon(x)$.

$$\begin{aligned}
x &= f_1(f_1^{-1}(x)) \\
&= f_1(\alpha x + \beta x^2 + x^2\epsilon(x)) \\
&= 6(\alpha x + \beta x^2 + x^2\epsilon(x)) + 7(\alpha x + \beta x^2 + x^2\epsilon(x))^2 + x^2\epsilon(x) \\
&= 6\alpha x + (6\beta + 7\alpha^2)x^2 + x^2\epsilon(x)
\end{aligned}$$

Puisque le développement limité de x est unique, $6\alpha = 1$ et $6\beta + 7\alpha^2 = 0$, ce qui donne $\alpha = 1/6$ et $\beta = -7/216$.

2. a) $f_2(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{x + x\epsilon(x)}{x} = 1 + \epsilon(x)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 1$ et la fonction f_2 se prolonge bien par continuité en 0.
b) $f_2(x) = \frac{x - x^2/2 + x^3/3 + x^3\epsilon(x)}{x} = 1 - x/2 + x^2/3 + x^2\epsilon(x)$
c) Puisque $f_2(0) = 1$, $f_2^{-1}(1) = 0$. Le développement limité de f_2^{-1} au voisinage de 1 est donc de la forme :

$$f_2^{-1}(x) = \alpha(x-1) + \beta(x-1)^2 + (x-1)^2\epsilon(x-1)$$

Au voisinage de 1 :

$$\begin{aligned}
1 + (x-1) = x &= f_2(f_2^{-1}(x)) \\
&= f_2(\alpha(x-1) + \beta(x-1)^2 + (x-1)^2\epsilon(x-1)) \\
&= 1 - (\alpha(x-1) + \beta(x-1)^2 + (x-1)^2\epsilon(x-1))/2 \\
&\quad + (\alpha(x-1) + \beta(x-1)^2 + (x-1)^2\epsilon(x-1))^2/3 + x^2\epsilon(x) \\
&= 1 - \frac{\alpha}{2}(x-1) + (\frac{\alpha^2}{3} - \frac{\beta}{2})(x-1)^2 + (x-1)^2\epsilon(x-1)
\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on a $-\frac{\alpha}{2} = 1$ et $\frac{\alpha^2}{3} - \frac{\beta}{2} = 0$, c'est-à-dire $\alpha = -2$ et $\beta = 8/3$.

$$f_2^{-1}(x) = -2(x-1) + \frac{8}{3}(x-1)^2 + (x-1)^2\epsilon(x-1)$$

Bonus : La fonction f_2 est dérivable sur $]-1;+\infty[-\{0\}$ et sa dérivée vaut :

$$f_2'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$$

On voudrait montrer que cette dérivée est strictement négative. Il faut donc montrer, puisque $1+x > 0$ pour tout $x > -1$, que $x - (1+x)\ln(1+x)$ est une fonction négative. Posons $g(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$.
On a $g'(x) = 1 - \ln(1+x) - \frac{1+x}{1+x} = -\ln(1+x)$. La fonction g' est donc strictement positive sur $]-1;0[$ et strictement négative sur $]0;+\infty[$. La fonction g est donc strictement croissante jusqu'à 0 puis strictement décroissante. Elle admet un maximum en 0 et ce maximum vaut $g(0) = 0$. La fonction g est donc strictement négative sur $]-1;+\infty[-\{0\}$.
On en déduit que f_2' est strictement négative sur $]-1;+\infty[-\{0\}$. La fonction f_2 est donc strictement décroissante sur $]-1;0]$ et sur $[0;+\infty[$. Elle est donc strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$ et réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ vers $]\lim_{x\to+\infty} f_2(x); \lim_{x\to-1} f_2(x)[$.
Calculons les limites.
En -1, $\ln(1+x) \to -\infty$ et $x \to -1$ donc $f_2(x) \to +\infty$.
En $+\infty$, $f_2(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{1+x}\frac{1+x}{x}$ donc, comme $\frac{\ln(1+x)}{1+x} \to 0$ et $\frac{1+x}{x} = \frac{1}{x} + 1 \to 1$, $f_2(x) \to 0$.
La fonction f_2 réalise donc une bijection de $]-1;+\infty[$ vers $]0;+\infty[$.

Exercice 6 :

1. On divise le numérateur et le dénominateur par $(\ln(x))^2$:

$$f_1(x) = \frac{1 + (\ln(x))^{-1} + (\ln(x))^{-2}}{1 - 3(\ln(x))^{-1} + 3(\ln(x))^{-2}}$$

En 0 : $\ln(x) \to -\infty$ donc $(\ln(x))^{-1} \to 0$ et $(\ln(x))^{-2} \to 0$. La limite vaut donc :

$$\lim_{x\to 0} f_1(x) = \frac{1+0+0}{1+0+0} = 1$$

En $+\infty$: $\ln(x) \to +\infty$ donc $(\ln(x))^{-1} \to 0$ et $(\ln(x))^{-2} \to 0$. La limite vaut donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \frac{1+0+0}{1+0+0} = 1$$

2. On divise le numérateur et le dénominateur par e^{x^3} :

$$f_2(x) = \frac{e^{x^2-x^3} - x\sin(x)e^{-x^3}}{1 + x^2e^{-x^3}}$$

Calculons la limite en $+\infty$ de toutes les fonctions qui interviennent dans ce quotient.
Quand $x \to +\infty$, $x^2 - x^3 = x^2(1-x) \to -\infty$ (car $x^2 \to +\infty$ et $1 - x \to -\infty$). donc $e^{x^2-x^3} \to 0$.
Quand $x \to +\infty$, $x^3 \to +\infty$ donc, par composition, $x^3e^{-x^3} \to 0$ (car $\lim\limits_{y\to+\infty} ye^{-x} = 0$) et $xe^{-x^3} = x^3e^{-x^3}/x^2 \to 0$. Puisque $\sin(x) \in [-1; 1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, pour tout $x \geq 0$:

$$-xe^{-x^3} \leq x\sin(x)e^{-x^3} \leq xe^{-x^3}$$

Par encadrement, on obtient donc que $x\sin(x)e^{-x^3} \to 0$.
Quand $x \to +\infty$, $x^2e^{-x^3} = x^3e^{-x^3}/x \to 0$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \frac{0-0}{1+0} = 0$.
3. $\tan(x) = x + x^2\epsilon(x)$ (La démonstration est dans le cours.)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tan(x)} - \frac{1}{x} &= \frac{1}{x + x^2\epsilon(x)} - \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x}(\frac{1}{1 + x\epsilon(x)} - 1) \\
&= \frac{1}{x}(1 + x\epsilon(x) - 1) \\
&= \epsilon(x)
\end{aligned}$$

Puisque $\epsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\tan(x)} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$$

4. $(1 + x)^{1/x} = (\exp(\ln(1 + x)))^{1/x} = \exp(\frac{1}{x}\ln(1 + x))$
Or $\ln(1 + x) = x + x\epsilon(x)$ donc $\frac{1}{x}\ln(1 + x) = 1 + \epsilon(x)$ et :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1 + x) = 1 + \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 1$$

Par composition, on obtient donc :

$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = \exp(1) = e$$

5. $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)} = \frac{1+\epsilon(\frac{\pi}{2}-x)}{(\frac{\pi}{2}-x)+(\frac{\pi}{2}-x)\epsilon(\frac{\pi}{2}-x)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}(1 + \epsilon(\frac{\pi}{2} - x))$
Donc $f_5(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}(1 + \epsilon(\frac{\pi}{2} - x)) + \ln(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1+\epsilon(\frac{\pi}{2}-x)+(\frac{\pi}{2}-x)\ln(\frac{\pi}{2}-x)}{\frac{\pi}{2}-x}$.
On sait que $\lim\limits_{y\to 0} y\ln(y) = 0$ (démonstration : lorsque $y \to 0$, $-\ln(y) \to +\infty$ donc $y\ln(y) = -(-\ln(y))\exp(-(-\ln(y))) \to 0$, puisque $\lim\limits_{z\to+\infty} z\exp(-z) = 0$). Donc, par composition des limites :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2} - x)\ln(\frac{\pi}{2} - x) = 0$$

Puisque $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\epsilon(\frac{\pi}{2}) = 0$, on trouve :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f_5(x) = \frac{1 + 0 + 0}{0^+} = +\infty$$