TD : Fonctions

Corrigé de l'exercice 7

1. a) Initialisation : pour $n = 0$, c'est vrai : $f(x) - f(0) = 2^0(f(x/2^0) - f(0))$ car $2^0 = 1$.
Récurrence : on suppose que la propriété est vraie pour n et on la démontre pour $n+1$:

$$\begin{gathered} f(x/2^n) - 2f(x/2^{n+1}) + f(0) = 0 \text{ (propriété donnée dans l'énoncé)} \\ \Rightarrow f(x/2^n) - f(0) = 2f(x/2^{n+1}) - 2f(0) \\ \Rightarrow f(x) - f(0) = 2^n(f(x/2^n) - f(0)) = 2^n.2(f(x/2^{n+1}) - f(0)) = 2^{n+1}(f(x/2^{n+1}) - f(0)) \end{gathered}$$

En supposant la propriété vraie au rang n, on l'a donc démontrée au rang $n+1$. Cela implique qu'elle est vraie pour tout n.

b)

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \lim_{n\to+\infty} f(x) - f(0) \\ &= \lim_{n\to+\infty} 2^n(f(x/2^n) - f(0)) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x/2^n) - f(0)}{x/2^n}.x \\ &= xf'(0) \end{aligned}$$

car $x/2^n \to 0$ quand $n \to +\infty$

c) Pour tout x, $f(x) = f(0) + xf'(0)$. L'équation de f est donc de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a = f'(0)$ et $b = f(0)$. La fonction f est affine.
Sa dérivée est donc constante (c'est a) et f est deux fois dérivable, car les constantes sont dérivables.

2. a)

$$(2) \quad v_0 - u_0 = x - 0 = x = x/2^0$$

$$(3) \quad f(u_0) - 2f(\frac{u_0 + v_0}{2}) + f(v_0) = f(0) - 2f(x/2) + f(x) = \epsilon = \epsilon/2^{2\times0} \geq \epsilon/2^{2\times0}$$

b)

$$\begin{aligned}(f(u_n)-2f(\frac{3u_n+v_n}{4})+f(\frac{u_n+v_n}{2}))+2(f(\frac{3u_n+v_n}{4})-2f(\frac{u_n+v_n}{2})+f(\frac{u_n+3v_n}{4}))\\ +(f(\frac{u_n+v_n}{2})-2f(\frac{u_n+3v_n}{4})+f(v_n))\\ =f(u_n)-2f(\frac{u_n+v_n}{2})+f(v_n)\\ \geq \epsilon/2^{2n}\end{aligned}$$

La dernière égalité est une conséquence du fait que $u_0, ..., u_n$ et $v_0, ..., v_n$ vérifient la propriété (3).
Or, si on suppose par l'absurde que ni (A), ni (B), ni (C) ne sont vérifiées, on doit aussi avoir :

$$\begin{aligned}(f(u_n)-2f(\frac{3u_n+v_n}{4})+f(\frac{u_n+v_n}{2}))+2(f(\frac{3u_n+v_n}{4})-2f(\frac{u_n+v_n}{2})+f(\frac{u_n+3v_n}{4}))\\ +(f(\frac{u_n+v_n}{2})-2f(\frac{u_n+3v_n}{4})+f(v_n))\\ <\epsilon/2^{2(n+1)}+2.\epsilon/2^{2(n+1)}+\epsilon/2^{2(n+1)}\\ =4\epsilon/2^{2(n+1)}=\frac{4}{2^2}\frac{\epsilon}{2^{2n}}\\ =\epsilon/2^{2n}\end{aligned}$$

On doit donc avoir $\epsilon/2^{2n} < \epsilon/2^{2n}$, ce qui est absurde. Donc (A), (B) ou (C) est vraie.

c) Il faut étudier chaque cas.

Si (A) est vraie :
- (1) : $v_n - u_n = x/2^n > 0$ donc $u_n < v_n$. De plus, $(u_0, ..., u_n)$ est croissante et $(v_0, ..., v_n)$ décroissante, on a :

$$u_0 \leq ... \leq u_n = u_{n+1} \leq u_{n+1}$$
$$v_0 \geq ... \geq v_n = \frac{v_n+v_n}{2} \geq \frac{u_n+v_n}{2} = v_{n+1}$$

Donc $(u_0, ..., u_{n+1})$ est croissante et $(v_0, ..., v_{n+1})$ décroissante.
- (2) : $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} - u_n = \frac{v_n-u_n}{2} = \frac{x/2^n}{2} = x/2^{n+1}$
- (3) : $f(u_n) - 2f(\frac{u_n+v_n}{2}) + f(v_n) = f(u_n) - 2f(\frac{3u_n+v_n}{4}) + f(\frac{u_n+v_n}{2}) \geq \epsilon/2^{2(n+1)}$
(car (C) est vraie)

Si (A) n'est pas vraie mais que (B) l'est :
- (1) : $v_n - u_n = x/2^n > 0$ donc $u_n < v_n$. De plus, $(u_0, ..., u_n)$ est croissante et $(v_0, ..., v_n)$ décroissante, on a :

$$u_0 \leq ... \leq u_n = \frac{3u_n+u_n}{4} < \frac{3u_n+v_n}{4} = u_{n+1}$$
$$v_0 \geq ... \geq v_n = \frac{v_n+3v_n}{4} \geq \frac{u_n+3v_n}{4} = v_{n+1}$$

Donc $(u_0, ..., u_{n+1})$ est croissante et $(v_0, ..., v_{n+1})$ décroissante.
- (2) : $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4} - \frac{3u_n+v_n}{4} = \frac{v_n-u_n}{2} = \frac{x/2^n}{2} = x/2^{n+1}$
- (3) : $f(u_n) - 2f(\frac{u_n+v_n}{2}) + f(v_n) = f(\frac{3u_n+v_n}{4}) - 2f(\frac{u_n+v_n}{2}) + f(\frac{u_n+3v_n}{4}) \geq \epsilon/2^{2(n+1)}$
(car (B) est vraie)

Enfin, si seule (C) est vraie :
- (1) : $v_n - u_n = x/2^n > 0$ donc $u_n < v_n$. De plus, $(u_0, ..., u_n)$ est croissante et $(v_0, ..., v_n)$ décroissante, on a :

$$u_0 \leq ... \leq u_n = \frac{u_n + u_n}{2} < \frac{u_n + v_n}{2} = u_{n+1}$$
$$v_0 \geq ... \geq v_n = v_{n+1} \geq v_{n+1}$$

Donc $(u_0, ..., u_{n+1})$ est croissante et $(v_0, ..., v_{n+1})$ décroissante.
- (2) : $v_{n+1} - u_{n+1} = v_n - \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{v_n-u_n}{2} = \frac{x/2^n}{2} = x/2^{n+1}$
- (3) : $f(u_n) - 2f(\frac{u_n+v_n}{2}) + f(v_n) = f(\frac{u_n+v_n}{2}) - 2f(\frac{u_n+3v_n}{4}) + f(v_n) \geq \epsilon/2^{2(n+1)}$
(car (C) est vraie)

3. a) Les suites sont adjacentes : (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, la distance $v_n - u_n = x/2^n$ est strictement positive et tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Elles convergent donc vers une limite commune, l.

b) Puisque (u_n) est croissante, pour tout n, $u_n \leq \lim_{m\to+\infty} u_{n+m} = l$. De même, comme (v_n) est décroissante, $l \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Puisque $u_n - l \leq 0$, $|u_n - l| = l - u_n \leq v_n - u_n = \frac{x}{2^n}$.
Puisque $v_n - l \geq 0$, $|v_n - l| = v_n - l \leq v_n - u_n = \frac{x}{2^n}$.
$\frac{u_n+v_n}{2} - l = \frac{u_n-l}{2} + \frac{v_n-l}{2} \leq \frac{v_n-l}{2} \leq \frac{x/2^n}{2} \leq \frac{x}{2^n}$
$\frac{u_n+v_n}{2} - l = \frac{u_n-l}{2} + \frac{v_n-l}{2} \geq \frac{u_n-l}{2} \geq \frac{-x/2^n}{2} \geq -\frac{x}{2^n}$
Donc $-\frac{x}{2^n} \leq \frac{u_n+v_n}{2} - l \leq \frac{x}{2^n}$. Cela implique que $|\frac{u_n+v_n}{2} - l| \leq \frac{x}{2^n}$.

c) Puisque $f(l + x) = f(l) + xf'(l) + x^2 \times 0 + x^2\epsilon(x)$:

$$f(y) - (f(l) + f'(l)(y - l)) = f(l + (y - l)) - (f(l) + f'(l)(y - l)) = (y - l)^2\epsilon(y - l)$$

Or $\lim_{y\to l}\epsilon(y - l) = \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$. Donc, lorsque $(y - l)$ est assez proche de 0 :

$$-\frac{\epsilon}{8x^2} \leq \epsilon(y - l) \leq \frac{\epsilon}{8x^2}$$

Dit de façon plus rigoureuse : il existe $\alpha > 0$ tel que, si $y - l \in [-\alpha; \alpha]$ (c'est-à-dire si $y \in [l - \alpha; l + \alpha]$), on ait $-\frac{\epsilon}{8x^2} \leq \epsilon(y - l) \leq \frac{\epsilon}{8x^2}$.
Pour ce α, si $y \in [l - \alpha; l + \alpha]$:

$$f(y) - (f(l) + f'(l)(y - l)) = (y - l)^2\epsilon(y - l) \leq (y - l)^2\frac{\epsilon}{8x^2}$$
$$\Rightarrow f(y) \leq f(l) + f'(l)(y - l) + (y - l)^2\frac{\epsilon}{8x^2}$$

De même :

$$f(y) - (f(l) + f'(l)(y-l)) = (y-l)^2\epsilon(y-l) \geq -(y-l)^2\frac{\epsilon}{8x^2}$$
$$\Rightarrow f(y) \geq f(l) + f'(l)(y-l) - (y-l)^2\frac{\epsilon}{8x^2}$$

d)

$$\begin{aligned}
f(u_n) &\leq f(l) + (u_n - l)f'(l) + (u_n - l)^2\frac{\epsilon}{8x^2} \\
&\leq f(l) + (u_n - l)f'(l) + \left(\frac{x}{2^n}\right)^2\frac{\epsilon}{8x^2} \\
&= f(l) + (u_n - l)f'(l) + \frac{\epsilon}{8.2^{2n}} \\
&= f(l) + (u_n - l)f'(l) + \frac{\epsilon}{2^{2n+3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(v_n) &\leq f(l) + (v_n - l)f'(l) + (v_n - l)^2\frac{\epsilon}{8x^2} \\
&\leq f(l) + (v_n - l)f'(l) + \left(\frac{x}{2^n}\right)^2\frac{\epsilon}{8x^2} \\
&= f(l) + (v_n - l)f'(l) + \frac{\epsilon}{2^{2n+3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(\frac{u_n + v_n}{2}) &\geq f(l) + \left(\frac{u_n + v_n}{2} - l\right)f'(l) - \left(\frac{u_n + v_n}{2} - l\right)^2\frac{\epsilon}{8x^2} \\
&\geq f(l) + \left(\frac{u_n + v_n}{2} - l\right)f'(l) - \left(\frac{x}{2^n}\right)^2\frac{\epsilon}{8x^2} \\
&= f(l) + \left(\frac{u_n + v_n}{2} - l\right)f'(l) - \frac{\epsilon}{2^{2n+3}}
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon}{2^{2n}} \leq f(u_n) - 2f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right) + f(v_n) &\leq f(l) + (u_n - l)f'(l) + \frac{\epsilon}{2^{2n+3}} \\
&\quad - 2\left(f(l) + \left(\frac{u_n+v_n}{2} - l\right)f'(l) - \frac{\epsilon}{2^{2n+3}}\right) \\
&\quad + f(l) + (v_n - l)f'(l) + \frac{\epsilon}{2^{2n+3}} \\
&= \frac{\epsilon}{2^{2n+3}} + 2\frac{\epsilon}{2^{2n+3}} + \frac{\epsilon}{2^{2n+3}} \\
&= \frac{4\epsilon}{2^{2n+3}} \\
&= \frac{\epsilon}{2^{2n+1}}
\end{aligned}$$

C'est absurde car $\frac{\epsilon}{2^{2n}} > \frac{\epsilon}{2^{2n+1}}$.
4. a) La fonction H est dérivable, de dérivée G. La fonction G est dérivable, de dérivée $2g$. La fonction H est donc deux fois dérivable. Cela implique qu'en tout point, elle admet un développement limité d'ordre 2, dont l'expression nous est donnée par le théorème de Taylor-Young :

$$H(x_0 + x) = H(x_0) + xH'(x_0) + \frac{x^2}{2}H''(x_0) + x^2\epsilon(x) = H(x_0) + xH'(x_0) + x^2 g(x_0) + x^2\epsilon(x)$$

La fonction $f - H$ admet donc en tout point un développement limité d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
f(x_0 + x) - H(x_0 + x) &= f(x_0) + xf'(x_0) + x^2 g(x_0) - H(x_0) - xH'(x_0) - x^2 g(x_0) + x^2\epsilon(x) \\
&= (f - H)(x_0) + x(f - H)'(x_0) + 0.x^2 + x^2\epsilon(x)
\end{aligned}$$

Le terme d'ordre 2 du développement limité de $f - H$ est donc nul.
b) On pose $\tilde{f} = f - H$. Cette fonction admet un développement limité d'ordre 2 dont le terme d'ordre 2 est nul. On peut donc lui appliquer les résultats des question 1., 2. et 3..
D'après les questions 2. et 3., il est absurde qu'on ait, pour un certain $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(0) - 2\tilde{f}(x/2) + \tilde{f}(x) \neq 0$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(0) - 2\tilde{f}(x/2) + \tilde{f}(x) = 0$. D'après la question 1., cela implique que $\tilde{f} = f - H$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
La fonction H est aussi de classe $\mathcal{C}^2$: elle est deux fois dérivable et sa dérivée seconde, $2g$, est continue. Donc $f = \tilde{f} + H$ est une somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$; elle doit alors être aussi de classe $\mathcal{C}^2$.