Université Pierre et Marie Curie
LM110

Le 18 octobre 2012
http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM110.html

TD : Fonctions

Rappels :

Soient a, b des réels quelconques (pouvant éventuellement valoir $-\infty$ ou $+\infty$ lorsque cela a un sens), tels que $a < b$.

1. Si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement croissante, alors f réalise une bijection entre $[a;b]$ et $[f(a);f(b)]$.
2. Si $f :]a;b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement croissante, alors f réalise une bijection entre $]a;b]$ et $]\lim\limits_{x\to a^+} f(x); f(b)]$.
3. Si $f : [a;b[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement croissante, alors f réalise une bijection entre $[a;b[$ et $[f(a); \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$.
4. Si $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement croissante, alors f réalise une bijection entre $]a;b[$ et $]\lim\limits_{x\to a^+} f(x); \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$.
5. Si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement décroissante, alors f réalise une bijection entre $[a;b]$ et $[f(b);f(a)]$.
6. Si $f :]a;b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement décroissante, alors f réalise une bijection entre $]a;b]$ et $[f(b); \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$.
7. Si $f : [a;b[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement décroissante, alors f réalise une bijection entre $[a;b[$ et $]\lim\limits_{x\to b^-} f(x); f(a)]$.
8. Si $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement décroissante, alors f réalise une bijection entre $]a;b[$ et $]\lim\limits_{x\to b^-} f(x); \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$.

Propriété : toutes les limites des huit propriétés précédentes existent ; elles peuvent éventuellement valoir $-\infty$ ou $+\infty$.

Exercice 1 :

1. Montrer que les fonctions suivantes réalisent des bijections entre les intervalles indiqués :

$f_1 : x \to 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ entre $[1;2]$ et $[-1;0]$
$f_2 : x \to x - \ln x$ entre $[1;+\infty[$ et $[1;+\infty[$
$f_3 : x \to \sin(\frac{\pi}{2}(1-e^x))$ entre $]-\infty;0]$ et $[0;1[$

2. a) Montrer que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue strictement croissante, alors elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un ensemble de la forme $]\lambda;\mu[$, où λ et μ sont des réels pouvant éventuellement valoir $-\infty$ ou $+\infty$.

b) Donner un exemple où $\lambda = -\infty$ et $\mu = +\infty$, un exemple où λ est fini et $\mu = +\infty$ et un exemple où λ et μ sont finis.

Exercice 2 :

1. Montrer que $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

2. Calculer $\arctan'(x)$.

Exercice 3 :

Calculer un développement limité des fonctions suivantes à l'ordre et au point indiqué.

$f_1 : x \to e^{x+x^2}$ en 0, à l'ordre 2
$f_2 : x \to \frac{x+2}{x-1}$ en 0, à l'ordre 2
$f_3 : x \to \cos^2(x)$ en 0, à l'ordre 3
$f_4 : x \to \sin^2(x)$ en 0, à l'ordre 3
$f_5 : x \to \sin(\ln(1+x))$ en 0, à l'ordre 2
$f_6 : x \to e^{x^2} - e^x$ en 1, à l'ordre 2

Exercice 4 :

Calculer les limites des fonctions suivantes en 0.

$$f_1 : x \to \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \qquad f_2 : x \to (1+x)^{1/x} \qquad f_3 : x \to \frac{1-\cos x}{1-e^{x^2}}$$

Exercice 5 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(x) = x + e^{-f(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$.

2. Calculer $f'(0)$ et $f''(0)$.

3. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, donner un développement limité à l'ordre 2 de f en 0.

Exercice 6 :

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement en $+\infty$ de la fonction de l'exercice précédent.

1. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire que f admet une limite finie ou tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

2. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que, pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq x - 1 + f(1)$. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. On pose $C = f(1) - 1$ et, pour tout $x \geq 0$, $h(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) \geq 0$ et, pour tout $x \geq 1$, $h'(x) \leq e^{-(x+C)}$.

4. [Plus difficile] Montrer que h admet une limite finie en $+\infty$, qu'on note l. Montrer qu'il existe $\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction tendant vers 0 en $+\infty$ telle que $f(x) = \frac{x^2}{2} + l + \epsilon(x)$.

5. En utilisant les résultats des exercices 5 et 6, tracer approximativement le graphe de f sur $\mathbb{R}^+$.